Wissenschaft und Methode

Henri Poincaré


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



General

V. Band: **Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels. 2. Aufl. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer und 52 Illustrationen. 1911. Geb. ℳ 8.—

Nach einer Übersicht über die Erscheinungen der Ebbe und Flut, der Seeschwankungen, der besonderen Flutphänomene sowie der Beobachtungsmethoden werden in sehr anschaulicher, durch Figuren erläuterter Weise die fluterzeugenden Kräfte, die Theorien der Gezeiten sowie die Herstellung von Gezeitentafeln erklärt. Die folgenden Kapitel sind geophysikalischen und astronomischen Fragen, die mit der Einwirkung der Gezeitenkräfte auf die Weltkörper zusammenhängen, gewidmet.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von Max Planck-Berlin. 3. Auflage. 1913. Geb. ℳ 6.—

Behandelt die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise.

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert-Göttingen. 4. Auflage. 1913. Geb. ℳ 6.—

Ein Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zutage tritt.

VIII. Band: **Geschichte der Psychologie.** Von O. Klemm-Leipzig. 1911. Geb. ℳ 8.—

In der gegenwärtigen Zeit, wo die Psychologie als eine selbständige Erfahrungswissenschaft auftritt, dürfte ein geschichtlicher Ausweis geeignet sein, zahlreichen Mißverständnissen vorzubeugen. Daß dabei die Grenzfragen der Psychologie stärker in den Vordergrund treten, wird um so weniger als Fehler empfunden werden können, da sich ja nach einem Ausspruch Poincarés das Wachstum einer Wissenschaft gerade auf ihren Grenzgebieten vollzieht.

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann-Königsberg i. P. 2. Auflage. 1910. Geb. ℳ 6.—

Die sichtliche Zunahme der erkenntnistheoretischen Interessen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften veranlaßt den Verfasser seine späteren erkenntnistheoretischen Untersuchungen in die Grundzüge einzuarbeiten und damit eine weitere Durcharbeitung des gesamten für ihn in Betracht kommenden Gegenstandes zu versuchen.

X. Band: **Wissenschaft und Religion in der Philosophie unserer Zeit.** Von É. Boutroux-Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg i. E. 1910. Geb. ℳ 6.—

Boutroux zeigt uns in klarer und anschaulicher Weise die Ideen einiger der größten Denker über die Beziehungen zwischen Wissenschaft und Religion. Er übt aber auch strenge Kritik und verhehlt uns nicht alle die Schwierigkeiten und Einwendungen, die sich gegen jedes dieser Systeme erheben lassen.

XI. Band: **Probleme d. Wissenschaft.** Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-München. 2 Teile. 1910.

I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.** Geb. ℳ 4.—
II. — **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.** Geb. ℳ 5.—

Der Verfasser entwickelt durch eine Analyse der Fragen der Logik und Psychologie eine neue Theorie der Erkenntnis, dabei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik bis zur Biologie, Wirtschaftslehre und Geschichte berührend.

XII. Band: **Die log. Grundlagen d. exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp-Marburg. 1910. Geb. ℳ 6.60.

Das Buch, das gleichsam eine nach modernen Begriffen reformierte „Kritik der reinen Vernunft“ darstellt, versucht eine in den Hauptzügen vollständige, geschlossene Philosophie der exakten Wissenschaften zu bieten, wobei ein strenger Systemzusammenhang angestrebt ist.

XIII. Band: **Pflanzengeographische Wandlungen der deutschen Landschaft.** Von H. Hausrath-Karlsruhe. 1911. Geb. ℳ 5.—

Das Aussehen der deutschen Landschaft hat im Laufe der Zeiten große Änderungen zum Teil unter dem Einfluß des Menschen erfahren. Ebenfalls bildet die künftige Gestaltung dieser Verhältnisse, die zweckmäßige Verteilung von Wald und Feld, die Nutzbarmachung der Heiden und Moore eine viel erörterte Frage. Ausgehend von den natürlichen Bedingungen der Vegetationsformen sucht der Verfasser diese Fragen aufzuklären, indem er vom Ende der Eiszeiten an dem Wechsel in der Verteilung und in dem Zustand von Wald, Feld, Wiese und Moor nachgeht und seine wahrscheinlichen Gründe feststellt.

XIV. Band: **Das Weltproblem vom Standpunkte des relativistischen Positivismus aus.** Historisch-kritisch dargestellt von J. Petzoldt-Charlottenburg. 2., vermehrte Aufl. 1911. Geb. ℳ 3.—

Vom Standpunkte des relativistischen Positivismus sucht der Verfasser auf neuen Wegen und zum Teil mit neuen Hilfsmitteln die Geschichte der Philosophie als eine sinnvolle Geschichte eines vorwissenschaftlichen, ursprünglich unvermeidlich gewesenen Irrtums des menschlichen Denkens verständlich zu machen. Auf Grund der von Schuppe, Mach und Avenarius vertretenen Anschauungen wird dieser Irrtum Schritt für Schritt verfolgt und endlich vollständig aufgelöst.

XV. Band: **Wissenschaft und Wirklichkeit.** Von M. Frischeisen-Köhler-Berlin. 1912. Geb. M 8.–

Das Buch, das aus umfassenderen Studien über die philosophischen Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften hervorgegangen ist, gibt eine neue Grundlage des kritischen Realismus.

XVI. Band: **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von É. Picard-Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann-München. 1913. Geb. M 6.—

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über den Stand unseres Wissens in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts zu geben. Man findet die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen man heute den Begriff der wissenschaftlichen Erklärung betrachtet, ebenso wie die Rolle, die hierbei die Theorien bilden, eingehend erörtert.

XVII. Band: **Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré-Paris. Deutsch von F. und L. Lindemann-München. 1913. Geb. ca. M 6.—

Eine summarische und getreue Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaften, ihrer Methoden und Tendenzen, der einige historische Bemerkungen vorangehen, läßt vielleicht besser als abstrakte Abhandlungen verstehen, was die Gelehrten suchen, welche Vorstellung man sich von der Wissenschaft machen soll, und was man füglich von ihr erwarten darf.

XVIII. Band: **Probleme der Sozialphilosophie.** Von R. Michels-Basel. 1913. Geb. M 4.80.

Bezweckt eine eindringliche Untersuchung der im Mittelpunkt der soziologischen Forschung stehenden Probleme, wie: Cooperation, Solidarität, Kastenbildung. Der Verfasser bietet allenthalben nicht so sehr Lösungen als vielmehr neue Gesichtspunkte für die behandelten Probleme.

In Vorbereitung befinden sich:

Prinzipien der vergleichenden Anatomie. Von H. Braus.

Die Erde als Wohnsitz des Menschen. Von K. Dove.

Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich. Von K. Escherich.

Relativitätstheorie. V. Ph. Frank.

Erdbeben und Gebirgsbau. Von Fr. Frech.

Ethik als Kritik der Weltgeschichte. Von A. Görland.

Probleme der Morphologie des Festlandes. Von A. Hettner.

Die Materie im Kolloidalzustand. Von V. Kohlschütter.

Grundlagen der Pädagogik. Von R. Lehmann.

Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie. Von G. Linck.

Botanische Beweismittel für die Abstammungslehre. Von H. Potonié.

Anthropologie u. Rassenkunde. Von O. Schlaginhaufen.

Methoden der geographischen Forschung. Von O. Schlüter.

Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper. Von H. v. Seeliger.

Meteorologische Zeit- u. Streitfragen. Von R. Süring.

Deszendenzlehre. Von S. Tschulock.

Grundfragen der Klimatologie. Von A. Woeikof.

Geschichte des Vulkanismus. Von Joh. Walther.

Grundlagen der Psychologie. Von Th. Ziehen.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

XVII

HENRI POINCARÉ

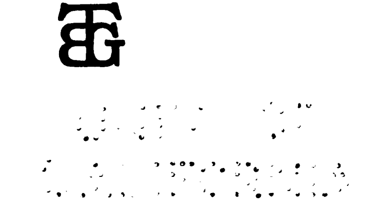
MEMBRE DE L'INSTITUT

WISSENSCHAFT UND METHODE

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE
MIT ERLÄUTERNDEN ANMERKUNGEN

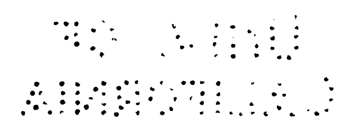
VON

F. UND L. LINDEMANN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

General



VORWORT.

Das vorliegende Werk schließt sich eng an die beiden anderen mathematisch-philosophischen Werke des Verfassers („Wissenschaft und Hypothese“ und „Der Wert der Wissenschaft“) an, deren deutsche Ausgaben im gleichen Verlage erschienen sind. Der Inhalt erscheint auf den ersten Blick weniger einheitlich; die leitenden Gedanken jedoch, welche die einzelnen Kapitel zusammenhalten, bringt der Verfasser selbst, teils in der Einleitung teils am Schlusse, zu klarer Darstellung, so daß es kaum nötig oder möglich ist hier noch etwas hinzuzufügen.

Das Erscheinen der deutschen Ausgabe wurde durch verschiedene ungünstige Umstände verzögert, so sehr, daß inzwischen durch ein unerbittliches Geschick die klare und reine Quelle, aus welcher der Verfasser leicht und sicher zu schöpfen verstand, für immer zum Versiegen gebracht wurde. Um so wertvoller bleibt es für uns Überlebende, in diesen Büchern ein Bekenntnis über die Entwicklung, die Ziele und die innersten Überzeugungen des seltenen Mannes zu besitzen. Gerade im vorliegenden Bande, wo er den Forscher bei seiner Arbeit zeigt, wo er die Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichtes berührt, wo er seine allgemeinen Ausführungen an den Erfahrungen im eigenen Werdegange entwickelt, gewinnen wir willkommene Aufschlüsse über Poincarés Arbeitsweise und über die ihn treibenden Gedanken. Immer wieder müssen wir den hohen Ernst bewundern, mit dem er bei aller Hochschätzung der Anwendungen seiner Wissenschaft die Frage nach der Nützlichkeit derselben zurückweist und den Betrieb der Wissenschaft allein um ihrer selbst willen als das Ideal hinstellt,

das jeden Forscher zu leiten hat. Nicht genug kann er dabei hervorheben, wie schon allein die reine Schönheit des wissenschaftlichen Baues den Gelehrten anzieht und antreibt, indem die Befriedigung des ästhetischen Gefühls sich deckt mit den Forderungen des abstrakten Denkens.

Die in neuester Zeit so vielfach gepflegten Beziehungen zwischen Logik und Mathematik liegen Poincaré besonders am Herzen und kommen deshalb ausführlich zur Darstellung. Wie man weiß, stand er diesen Theorien sehr skeptisch gegenüber. Wenn er auch mit hoher Anerkennung von dem Scharfsinn der beteiligten Forscher spricht und die Tiefe der aufgeworfenen Fragen nicht verkennt, so erhebt er doch warnend seine Stimme gegen einzelne Richtungen, die ihm unfruchtbar erscheinen und die er als schädlich verwirft. Daß seine Ansichten über diese wichtigen und aktuellen Fragen, die er schon in verschiedenen Arbeiten behandelt hatte, hier im Zusammenhange zur Darstellung kommen, wird dem Leser wertvoll sein.

Wie in der deutschen Ausgabe von „Wissenschaft und Hypothese" wurde versucht, durch Hinzufügen von erläuternden und literarischen Anmerkungen dem Leser das tiefere Eindringen in die behandelten Fragen und Probleme zu erleichtern.

München, im Dezember 1913.

F. u. L. LINDEMANN.

INHALTSVERZEICHNIS.

VERBESSERUNGEN.

Seite 150,	Zeile 4 v. o.	lies	„keine“	statt	„eine“.
„ 213,	„ 8 v. u.	„	„nennt“	statt	„nimmt“.
„ 222,	„ 5 v. o.	„	„Bewegung“	statt	„Bemerkung“.
„ 228,	„ 10 v. u.	„	„hätte“	statt	„hatte“.

Einleitung.

In diesem Buche vereinige ich verschiedene Aufsätze, die sich mehr oder weniger auf Fragen der wissenschaftlichen Methodik beziehen. Die wissenschaftliche Methode besteht im Beobachten und Experimentieren; wenn der Gelehrte eine unbegrenzte Zeit zur Verfügung hätte, so brauchte man ihm nur zu sagen: „Schaue, und schaue richtig"; aber da er nicht die Zeit hat, alles zu erschauen und richtig zu schauen, und da es besser ist, nicht zu schauen, als schlecht zu schauen, so muß er eine Auswahl treffen. Die erste Frage ist also: wie soll er diese Auswahl treffen? Diese Frage begegnet dem Physiker ebenso wie dem Historiker, aber auch dem Mathematiker, und die Prinzipien, durch welche sie sich alle dabei leiten lassen müssen, sind einander ganz analog. Der Gelehrte paßt sich diesen Prinzipien unwillkürlich an, und ohne über dieselben nachzudenken, kann man vorhersagen, wie sich vielleicht die Zukunft der Mathematik gestalten wird.

Man wird sich darüber noch klarer, wenn man den Gelehrten bei seiner Arbeit beobachtet; in erster Linie muß man den psychologischen Mechanismus der Erfindung und insbesondere der mathematischen Erfindung kennen lernen. Die Beobachtung der Arbeitsweise des Mathematikers ist für den Psychologen ganz besonders lehrreich.

In allen Beobachtungswissenschaften muß man mit den Fehlern rechnen, die durch die Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente entstehen. Zum Glück kann man annehmen, daß diese Fehler sich unter gewissen Bedingungen teilweise kompensieren und so in den Mittelwerten der beobachteten Größen verschwinden; diese Kom-

pensation beruht auf dem Zufall. Was aber bedeutet hier das Wort Zufall? Dieser Begriff läßt sich nicht leicht rechtfertigen oder gar definieren; der Forscher kann ihn jedoch nicht entbehren, wie aus dem soeben über die Beobachtungsfehler Gesagten hervorgeht. Es ist deshalb notwendig, eine möglichst genaue Definition für diesen so schwer faßbaren und doch so unentbehrlichen Begriff zu geben.

Diese allgemeinen Bemerkungen gelten für alle Wissenschaften; so ist z. B. der Mechanismus der mathematischen Erfindung von dem Erfindungsmechanismus überhaupt nicht wesentlich verschieden. Weiterhin behandle ich Fragen, die sich mehr auf gewisse besondere Wissenschaften, und zwar zuerst auf die reine Mathematik beziehen.

In den der Mathematik gewidmeten Kapiteln muß ich ziemlich abstrakte Gegenstände behandeln. Zuerst spreche ich vom Begriffe des Raumes; jedermann weiß, oder sagt es wenigstens, daß der Raum relativ ist, aber wie viele Personen denken trotzdem so, als wenn sie ihn für absolut hielten? Bei einigem Nachdenken bemerkt man indessen bald die Widersprüche, zu denen die Annahme eines absoluten Raumes führt.

Die Unterrichtsfragen sind von besonderer Wichtigkeit, zunächst an sich selbst, dann aber auch aus folgendem Grunde: wenn man über die beste Art und Weise nachdenkt, wie man die neuen Begriffe jugendlichen Köpfen verständlich machen kann, so muß man zugleich darüber nachdenken, wie diese Begriffe von unseren Vorfahren erworben wurden, und folglich auch über die wahre Quelle, d. h. über die wahre Natur dieser Begriffe. Weshalb verstehen die Schüler meistens nichts von den Definitionen, welche von den Gelehrten aufgestellt werden? Weshalb muß man ihnen andere Definitionen geben? Die Fragen behandle ich in dem folgenden Kapitel, und ihre Lösung wird, glaube ich, den Philosophen, die sich mit der Logik der Wissenschaften beschäftigen, nützliche Anregungen bieten.

Viele Mathematiker glauben, daß man die Mathematik auf die Gesetze der formalen Logik zurückführen kann. Unerhörte Anstrengungen wurden zu dem Zwecke gemacht; zur Erreichung des bezeichneten Zieles scheute man sich z. B. nicht, die historische Ordnung in der Entstehung unserer Vorstellungen umzukehren, und man suchte das Endliche durch das Unendliche zu erklären. Für alle, welche das Problem ohne Voreingenommenheit angreifen, glaube ich im folgenden gezeigt zu haben, daß diesem Bestreben eine trügerische Illusion zugrunde liegt. Wie ich hoffe, wird der Leser die Wichtigkeit der Frage verstehen und mir die Trockenheit der Kapitel verzeihen, die ich ihr widmen mußte.

Die letzten Kapitel beziehen sich auf die Astronomie und sind leichter lesbar.

Die Mechanik scheint gegenwärtig einer vollständigen Umwälzung entgegenzugehen. Die Begriffe, die bisher scheinbar am festesten begründet waren, werden durch kühne Neuerer mit Erfolg bekämpft. Es wäre sicher voreilig, ihnen schon jetzt nur deshalb recht zu geben, weil sie Neuerer sind. Aber es ist von Interesse, ihre Lehren klarzulegen, und das habe ich im folgenden versucht. Ich habe mich dabei möglichst an die geschichtliche Entwicklung gehalten; denn die neuen Ideen würden zu überraschend erscheinen, wenn man nicht sähe, wie sie allmählich entstehen konnten.

Die Astronomie bietet uns ein großartiges Schauspiel und stellt uns gigantische Probleme. Man kann nicht daran denken, die experimentelle Methode direkt auf sie anzuwenden; dazu sind unsere Laboratorien zu klein. Aber die Analogie mit den Erscheinungen, die wir in den Laboratorien studieren können, kann den Astronomen wenigstens leiten. Das System der Milchstraße z. B. besteht aus einer Menge Sonnen, deren Bewegungen auf den ersten Blick ganz willkürlich erscheinen. Kann man dieses System von Sonnen nicht mit dem Systeme der Moleküle eines Gases vergleichen,

dessen Eigenschaften uns die kinetische Gastheorie kennen gelehrt hat? Durch einen scheinbaren Umweg kommt so die Methode des Physikers dem Astronomen zu Hilfe.

Zum Schlusse schildere ich kurz die geschichtliche Entwicklung der Geodäsie in Frankreich; ich zeige, welche Anstrengungen die Geodäten machen, welche Ausdauer sie beweisen, welchen Gefahren sie sich aussetzen müssen, um uns die geringen Kenntnisse zu verschaffen, die wir von der Gestalt der Erde besitzen. Aber ist das auch noch eine Frage der Methode? Ohne Zweifel, denn diese Geschichte lehrt uns, mit welchen Vorsichtsmaßregeln man ein ernsthaftes wissenschaftliches Unternehmen umgeben, was man an Zeit und Arbeitskraft opfern muß, um eine neue Dezimale der zu bestimmenden Größe sicherzustellen.

Erstes Buch.

Forscher und Wissenschaft.

Erstes Kapitel.

Die Auswahl der Tatsachen.

Tolstoi erklärt irgendwo, warum er die Forderung: „die Wissenschaft um der Wissenschaft willen“ für töricht halte. Wir können unmöglich alle Tatsachen kennen, weil ihre Anzahl so gut wie unendlich ist. Man muß eine Auswahl treffen; sollen wir uns dabei — meint er — einfach durch die Laune unserer Wißbegierde leiten lassen? Wäre es nicht besser, je nach der Nützlichkeit die Entscheidung zu treffen, d. h. nach unseren praktischen und vor allem nach unseren moralischen Bedürfnissen? Haben wir nicht etwas Besseres zu tun als die Anzahl der Blattläuse zu zählen, die es auf unserem Planeten gibt?

Es ist klar, daß das Wort Nützlichkeit für Tolstoi nicht den Sinn hat wie für Geschäftsleute und für den größten Teil unserer Mitbürger. Er kümmert sich wenig um industrielle Anwendungen, um die Wunder der Elektrizität oder um den Automobilismus; alles das betrachtet er vielmehr als Hindernisse für den moralischen Fortschritt. Für nützlich hält Tolstoi nur das, was den Menschen besser machen kann.

Was mich betrifft, so muß ich gestehen, daß ich mich weder mit dem einen, noch mit dem andern Ideal zufrieden geben würde; ich möchte ebensowenig mit einer gierigen, bornierten Geldherrschaft zu tun haben, als mit einer ebenso tugendhaften wie mittelmäßigen Demokratie, welche nichts Besseres weiß, als die linke Wange hinzuhalten, wenn die

rechte geschlagen wird. In einer solchen Welt könnten nur Gelehrte ohne Wißbegier leben, Leute, die jeder Erregung aus dem Wege gehen und die nicht an einer Krankheit, sondern ganz gewiß an Langeweile sterben würden. Im übrigen ist ja das alles Geschmacksache, und ich will mich über diesen Punkt nicht weiter auslassen.

Damit ist die Frage allerdings nicht erledigt, sie verlangt nach wie vor unsere Aufmerksamkeit; wenn unsere Wahl nur durch Laune oder unmittelbar nützliche Anwendbarkeit beeinflußt werden soll, so kann von „Wissenschaft um der Wissenschaft willen" nicht die Rede sein, und es könnte dann überhaupt keine Wissenschaft mehr geben. Ist das nun richtig? Daß man eine Auswahl treffen muß, kann nicht bestritten werden; die Tatsachen sind schneller wie wir, und bei aller Anstrengung würden wir sie nicht einholen können; während der Forscher eine Tatsache entdeckt, geschehen in jedem Kubikmillimeter seines Körpers Milliarden über Milliarden anderer Tatsachen. Wollte man die Natur in der Wissenschaft umfassen, so hieße das, das Ganze in einen Teil zwängen.

Aber die Gelehrten glauben, daß es eine Rangordnung der Tatsachen gibt und daß man unter denselben eine verständige Wahl treffen kann; sie haben recht, weil ohne diese Wahl keine Wissenschaft bestehen könnte und weil die Wissenschaft doch existiert. Man braucht nur die Augen zu öffnen, um zu sehen, wie die Errungenschaften der Industrie, welche so viele Praktiker bereichert haben, niemals das Licht der Welt erblickt hätten, wenn diese Praktiker allein existiert hätten und wenn diese Errungenschaften nicht von uninteressierten Toren gefördert wären, die nie an die praktische Ausnutzung gedacht haben und die dennoch von etwas anderem, als nur von ihren Launen geleitet wurden.

So haben, wie Mach sagt, diese Toren den späteren Geschlechtern die Mühe des Denkens erspart. Diejenigen, welche nur auf eine sofortige praktische Verwertung hinge-

arbeitet hätten, würden der Nachwelt nichts hinterlassen haben, und bei einer neuen Forderung der Praxis hätte man wieder von vorne anfangen müssen. Indessen liebt der größte Teil der Menschheit das Denken nicht besonders, und das ist vielleicht ganz gut, weil der Instinkt sie leitet und sie meistens besser leitet, als die Vernunft ihre Intelligenz leiten würde, wenigstens dann, wenn sie ein unmittelbares Ziel oder wiederholt dasselbe Ziel im Auge haben: aber Instinkt ist Routine, und wenn er nicht durch den Gedanken befruchtet würde, so würde er beim Menschen ebensowenig Fortschritte machen wie bei der Biene oder bei der Ameise. Für diejenigen, welche das Denken nicht lieben, müssen daher andere denken, und da erstere sehr zahlreich sind, so muß jeder unserer Gedanken so oft als möglich nützlich und anwendbar sein; deshalb ist ein Gesetz um so wertvoller, je allgemeiner es ist.

Das zeigt uns, wie wir unsere Auswahl treffen müssen; die wertvollsten Tatsachen sind diejenigen, die man mehrmals benutzen kann, d. h. diejenigen, welche sich wahrscheinlich öfters wiederholen. Glücklicherweise sind wir in einer Welt geboren, in der es solche Tatsachen gibt. Setzen wir einmal voraus, wir hätten statt unserer sechzig chemischen Elemente deren sechzig Milliarden, ein Teil davon wäre allgemein verbreitet, die anderen seltener, aber alle gleichmäßig verteilt. Dann wäre jedesmal, wenn wir einen neuen Stein aufheben würden, die Wahrscheinlichkeit groß, daß er aus irgendeiner unbekannten Masse bestände; alles, was wir von den anderen Steinen wüßten, würde für ihn nicht gelten; vor jedem neuen Gegenstande würden wir uns verhalten wie ein neugeborenes Kind; wie dieses könnten wir nur unseren Launen oder unseren Bedürfnissen folgen; in einer solchen Welt gäbe es keine Wissenschaft. Vielleicht wäre darin das Denken und wohl gar das Leben selbst unmöglich, weil keine Entwicklung den Erhaltungstrieb ausbilden würde. Gott sei Dank steht es nicht so um uns; wie

alles Gute, an das man gewöhnt ist, wird es auch zu wenig geschätzt, daß wir nur eine beschränkte Anzahl von Elementen haben. Der Biologe würde sehr in Verlegenheit kommen, wenn er es nur mit Individuen und nicht auch mit Arten zu tun hätte und wenn nicht infolge von Vererbung die Söhne den Vätern ähnlich wären.

Welche Tatsachen haben nun die meiste Anwartschaft darauf, sich zu wiederholen? Vor allem die einfachen Tatsachen. Es ist klar, daß sich in einer komplizierten Tatsache tausend Umstände durch den Zufall vereinigen und daß wiederum nur ein noch unwahrscheinlicherer Zufall sie von neuem vereinigen könnte. Gibt es nun einfache Tatsachen, und wenn dem so ist, woran sollen wir sie erkennen? Wer bürgt uns dafür, daß eine Tatsache, die wir für einfach halten, sich nicht als erschreckend kompliziert erweist? Alles, was wir darüber sagen können, ist: wir müssen diejenigen Tatsachen begünstigen, welche einfach zu sein scheinen gegenüber denjenigen, bei denen schon unser unvollkommenes Auge unähnliche Elemente unterscheidet. Und dann gibt es nur zwei Möglichkeiten: entweder ist diese Einfachheit tatsächlich, oder die Elemente sind so innig gemischt, daß sie nicht mehr unterscheidbar sind. Im ersteren Falle haben wir Aussicht, wiederholt auf die einfache Tatsache zu stoßen, entweder in ihrer ganzen Einfachheit oder als Element, das selbst einem komplizierten Ganzen angehört. Im zweiten Falle hat die innige Mischung mehr Aussicht, sich zu wiederholen, als ein Gemisch unterscheidbarer Bestandteile; der Zufall kann zusammenmischen, aber nicht entmischen, und wenn man aus verschiedenartigen Elementen ein wohlgeordnetes Gebäude aufrichten will, in welchem man die Elemente noch unterscheiden kann, so muß man den Bau dafür besonders einrichten. Es besteht aber geringe Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Gemisch, in dem man die einzelnen Elemente unterscheiden kann, sich jemals wiederholt; es ist dagegen sehr wahrscheinlich, daß

eine Mischung, die auf den ersten Blick homogen erscheint, sich wiederholt bildet. Folglich sind die Tatsachen, welche einfach scheinen, selbst wenn sie nicht einfach sind, leichter durch Zufall herbeizuführen als die wirklich einfachen Tatsachen.

Das rechtfertigt die vom Forscher instinktiv angenommene Methode, und noch mehr wird sie dadurch gerechtfertigt, daß die häufigen Tatsachen uns einfach scheinen, weil wir an sie gewöhnt sind.

Aber wo finden wir nun die einfache Tatsache? Der Forscher suchte sie in zwei Extremen: im unendlich Großen und im unendlich Kleinen. Der Astronom fand sie, weil die Entfernungen zwischen den Gestirnen ungeheuer groß sind, so groß, daß jedes der Gestirne nur wie ein Punkt erscheint, so groß, daß die qualitativen Unterschiede verschwinden, und weil ein Punkt einfacher ist als ein Körper, der Gestalt und Eigenschaften besitzt. Der Physiker hat im Gegensatz dazu die Elementarerscheinungen untersucht, indem er sich die Körper in unendlich kleine Teile zerlegt denkt, denn die Bedingungen des Problems, welche beim Übergange von einem Punkte des Körpers zu einem andern nur langsame und stetige Veränderungen erleiden, können im Inneren eines jeden kleinen Würfels als konstant betrachtet werden.

Ebenso wurde der Biologe instinktiv dazu geführt, die Zelle für interessanter als das ganze Tier zu halten, und der Erfolg gab ihm recht, weil die Zellen den verschiedensten Organismen angehören und deshalb untereinander ähnlicher sind als die Organismen selbst, wenigstens für denjenigen, der ihre Ähnlichkeit zu erkennen weiß. Der Soziologe befindet sich in einiger Verlegenheit; die Elemente, für ihn also die Menschen, sind einander zu unähnlich, sie sind zu verschiedenartig, zu launisch, mit einem Worte: zu kompliziert; die Tatsachen der Weltgeschichte wiederholen sich nicht; wie soll er da die interessante Tatsache, nämlich die,

welche sich wiederholt, herausfinden? Die wissenschaftliche Methode besteht gerade in der Auswahl der Tatsachen; man müßte sich also vorerst damit beschäftigen, eine Methode zu erfinden, und man hat viele erfunden, weil keine Methode sich von selbst darbot; jeder Satz der Soziologie schlägt eine neue Methode vor, und jeder neu auftretende Gelehrte hütet sich, die Sätze seiner Vorgänger anzuwenden; somit ist die Soziologie diejenige Wissenschaft, welche die meisten Methoden und die wenigsten Resultate aufzuweisen hat.

Man muß also mit den regelmäßigen Tatsachen beginnen; nachdem aber das Gesetz wohlbegründet ist und zweifellos feststeht, so sind die Tatsachen, welche dem Gesetze gemäß verlaufen, bald ohne Interesse, denn sie lehren uns nichts Neues mehr. Dann wird die Ausnahme von Wichtigkeit. Dann wird man aufhören nach Ähnlichkeiten zu suchen, und dafür auf die Unterschiede das größte Gewicht legen, und von den Unterschieden wird man zunächst diejenigen auswählen, welche am deutlichsten hervortreten, nicht nur, weil sie am meisten in die Augen fallen, sondern weil sie am lehrreichsten sind. Ein einfaches Beispiel wird besser verständlich machen, was ich meine: Ich nehme an, man solle eine Kurve bestimmen, indem man einige ihrer Punkte beobachtet. Der Praktiker, der sich nur durch die unmittelbare Anwendbarkeit leiten läßt, würde nur diejenigen Punkte beobachten, deren er für irgendeinen Zweck gerade bedarf; diese Punkte würden sich ungünstig über die Kurve verteilen; sie würden sich in gewissen Bereichen anhäufen, in anderen nur selten vorkommen, und deshalb würde es unmöglich sein, sie in zuverlässiger Weise durch einen kontinuierlichen Zug zu verbinden, und diese Punkte wären deshalb für andere Anwendungen nicht weiter brauchbar. Der Gelehrte aber verfährt anders: da er die Kurve an sich studieren will, so wird er die zu beobachtenden Punkte regelmäßig verteilen, und sobald er einige von ihnen kennt, wird

er sie durch einen regelmäßigen Zug verbinden und damit die ganze Kurve kennen. Aber wie wird er dieses durchführen? Wenn er einen sehr weit entfernten Punkt der Kurve bestimmt hat, so wird er nicht in dessen Nähe bleiben, sondern er wird zunächst das entgegengesetzte Ende der Kurve in das Auge fassen; darauf ist ein Punkt ungefähr in der Mitte zwischen den beiden äußersten Punkten von größter Wichtigkeit usw.

Wenn ein Gesetz festgestellt ist, so müssen wir zuerst die Fälle aufsuchen, in welchen dieses Gesetz voraussichtlich versagt. Daher rührt, neben anderen Ursachen, das Interesse an den astronomischen Tatsachen und das Interesse an der geologischen Vergangenheit; denn indem wir uns im Raume sehr weit entfernen oder in der Zeit sehr weit zurückversetzen, werden wir unsere gewohnten Gesetze völlig umgestürzt finden; diese großen Umwälzungen werden uns dazu verhelfen, die kleinen Veränderungen besser zu sehen oder besser zu verstehen, welche sich in unserer unmittelbaren Nähe abwickeln, das heißt in dem kleinen Weltwinkel, in dem wir berufen sind zu leben und zu wirken. Wir werden diesen Winkel besser kennen lernen, nachdem wir in entfernten Gegenden umherschweiften, in denen wir sonst nichts zu tun hatten.

Worauf wir nun achten müssen, ist weniger die Feststellung von Ähnlichkeiten und Unterschieden als das Herausfinden von verborgenen Gleichförmigkeiten unter den scheinbaren Verschiedenheiten. Die einzelnen Gesetze scheinen zunächst miteinander nicht übereinzustimmen, aber wenn man näher hinsieht, bemerkt man, daß sie sich im allgemeinen gleichen; sie sind dem Inhalte nach verschieden, aber sie ähneln sich in der Form durch die Anordnung ihrer Teile. Wenn wir sie von dieser Seite betrachten, werden wir bemerken, wie sie sich erweitern und sich dehnen, um alles zu erfassen. Das bedingt den Wert gewisser Tatsachen, welche ein Ganzes ausmachen und zeigen, wie

dieses Ganze das getreue Abbild anderer bekannter Gesamtheiten ist.

Ich will mich hier nicht länger verweilen; schon diese wenigen Worte genügen, um zu beweisen, daß der Gelehrte nicht dem bloßen Zufall die Wahl der Tatsachen überläßt, die er beobachten soll. Er zählt nicht die Blattläuse, wie Tolstoi meint, weil die Anzahl dieser Tiere, so interessant sie auch sein mögen, Gegenstand launenhafter Veränderungen ist. Er versucht, viel Erfahrung und viel Denken in ein schwaches Heft zusammenzupressen, und darum enthält ein kleines Lehrbuch der Physik so viele wirklich ausgeführte Experimente, aber tausendmal mehr mögliche Experimente, von denen man im voraus das Ergebnis weiß.

Wir haben bis jetzt nur eine Seite der Frage ins Auge gefaßt. Der Gelehrte studiert die Natur nicht, weil das etwas Nützliches ist; er studiert sie, weil er daran Freude hat, und er hat Freude daran, weil sie so schön ist. Wenn die Natur nicht so schön wäre, so wäre es nicht der Mühe wert, sie kennen zu lernen, und das Leben wäre nicht wert, gelebt zu werden. Ich spreche hier, wohlverstanden, nicht von einer Schönheit, welche die Sinne berührt, nicht von der Schönheit der Eigenschaften und Erscheinungen; nicht, weil ich das verachte, davon bin ich weit entfernt, aber diese Art Schönheit hat nichts mit der Wissenschaft zu tun; ich will von der viel intimeren Schönheit reden, welche aus der harmonischen Ordnung der Teile hervorgeht und welche von der reinen Intelligenz erfaßt werden kann. Diese harmonische Ordnung ist es, welche den schwankenden Erscheinungen, die unseren Sinnen schmeicheln, Körper, oder besser gesagt, ein Rückgrat gibt, und ohne diesen Halt wäre die Schönheit dieser flüchtigen Träume nur unvollkommen, weil sie dann unbestimmt und immer vergänglich wäre. Im Gegenteil: die intellektuelle Schönheit genügt sich selbst, und um ihretwegen, mehr vielleicht als um des künftigen

Wohles der Menschheit willen, verurteilt sich der Gelehrte zu langen und mühsamen Arbeiten.

Das Suchen nach dieser eigentümlichen Schönheit, nach dem Sinne der Harmonie der Welt, bringt uns dazu, diejenigen Tatsachen zu wählen, welche am geeignetsten dazu sind, diese Harmonien zu vervollständigen, so wie der Künstler unter den eigenartigen Gesichtszügen seines Modells diejenigen auswählt, welche das Porträt vervollständigen und ihm Leben und Charakter verleihen. Man braucht nicht zu fürchten, daß diese instinktive und unwillkürliche Voreingenommenheit den Gelehrten von dem Suchen nach Wahrheit ablenkt. Man kann sich eine harmonische Welt träumen, wie weit sie auch hinter der wirklichen Welt zurückbleibt; die größesten Künstler, welche jemals lebten, die Griechen, konstruierten sich ein Himmelsgewölbe, und wie armselig ist es gegen das wahre Himmelsgewölbe, das wir jetzt kennen.

Weil die Einfachheit, weil die Größe schön ist, darum suchen wir mit Vorliebe nach einfachen Tatsachen und nach großen Tatsachen; darum erfreut es uns, bald den Riesenlauf der Gestirne zu verfolgen, bald mit dem Mikroskop diese wunderbare Kleinheit zu beobachten, welche an sich auch Größe ist, bald in den geologischen Zeiten die Spuren der Vergangenheit zu suchen, welche uns reizt, weil sie so weit zurückliegt.

So sehen wir, daß die Sorge um das Schöne uns zu derselben Wahl führt, wie die Sorge um das Nützliche. Demgemäß wird diese Ökonomie des Denkens, diese Ökonomie der Arbeit, welche nach Mach die ständige Erweiterung der Wissenschaft bedingt, zu einer Quelle der Schönheit, und zu gleicher Zeit bringt sie praktischen Vorteil. Wir bewundern diejenigen Gebäude, bei welchen der Architekt die Mittel dem Zweck anpaßte, und bei denen die Säulen scheinbar mühelos und ohne Anstrengung das ihnen auferlegte Gewicht tragen, wie die anmutigen Karyatiden des Erechtheion.

Woher stammt diese Übereinstimmung? Beruht sie nur darauf, daß die Dinge, welche uns schön erscheinen, sich am leichtesten unserer Intelligenz einprägen, und daß sie somit zugleich dasjenige Werkzeug bilden, welches die Intelligenz am besten zu handhaben versteht? Oder ist sie nur ein Spiel der Entwicklung und der natürlichen Zuchtwahl? Haben die Völker, deren Ideal sich am besten ihrem wohlverstandenen Interesse anpaßte, die anderen Völker vernichtet und ihren Platz eingenommen? Die einen wie die anderen folgten ihrem Ideal, ohne sich von den Folgen Rechenschaft abzulegen, aber während dieses Suchen die einen zum Untergang führte, bescherte es den anderen Macht und Ansehen. Man möchte versucht sein zu glauben: wenn die Griechen über die Barbaren triumphierten und Europa, die Erbin des Griechengedankens, die Welt beherrscht, so geschieht es, weil die Wilden die schreienden Farben und die lärmenden Trommeltöne liebten, die nur ihre Sinne beschäftigten, während die Griechen die geistige Schönheit liebten, welche sich unter der Schönheit der Sinne verbirgt, und daß diese geistige Schönheit es ist, welche die Intelligenz sichert und stärkt.

Ein solcher Triumph würde Tolstoi allerdings erschrecken, und er würde nicht erkennen wollen, daß dieser Triumph der geistigen Schönheit wirklich Nutzen bringen kann. Aber dieses selbstlose Suchen nach dem Wahren um seiner eigenen Schönheit willen ist auch heilsam und vermag den Menschen besser zu machen. Ich weiß wohl, daß es auch hier Ausnahmen gibt, daß der Forscher bei dem Suchen nach Wahrheit nicht immer die Freudigkeit findet, die er darin finden sollte, und daß es sogar Gelehrte gibt, die einen sehr schlechten Charakter haben.

Soll man daraus schlußfolgern, daß man die Wissenschaft aufgeben und nur noch Moralstudien treiben soll?

Oder glaubt man, daß die Moralisten selbst vorwurfsfrei sind, wenn sie von ihrer Kanzel herabsteigen?

Zweites Kapitel.

Die Zukunft der Mathematik.

Wollen wir die künftige Entwicklung der Mathematik voraussagen, so tun wir am besten, ihre Geschichte und ihren gegenwärtigen Zustand zu studieren.

Ist das nicht für uns Mathematiker ein unserem Berufe in gewisser Hinsicht entsprechendes Vorgehen? Wir sind daran gewöhnt zu extrapolieren; das ist ein Mittel, die Zukunft aus der Vergangenheit und aus der Gegenwart abzuleiten, und da wir genau wissen, was dieses Extrapolieren leisten kann, riskieren wir nicht, uns Illusionen über die Tragweite der Resultate, welche aus diesem Verfahren hervorgehen, zu machen.

Es hat einmal Unglückspropheten gegeben. Sie wiederholten gerne, daß alle lösbaren Probleme schon gelöst wären und daß wir nur eine Nachlese halten können. Glücklicherweise beruhigt uns das Beispiel der Vergangenheit. Oft genug glaubte man alle Probleme gelöst zu haben, oder wenigstens das Verzeichnis derjenigen gemacht zu haben, welche eine Lösung zulassen. Daraufhin hat sich der Sinn des Wortes Lösung erweitert, die für unlösbar gehaltenen Probleme sind die interessantesten von allen geworden und andere Probleme sind entstanden, an die man nicht dachte. Den Griechen erschien als eine gute Lösung diejenige, welche nur Zirkel und Lineal erforderte; später galt als gute Lösung eine solche, die man durch Wurzelausziehen erhält; noch später eine solche, in welcher nur algebraische Funktionen oder Logarithmen vorkommen. Die Pessimisten wurden somit fortwährend besiegt, immer gezwungen zurückzuweichen, und ich glaube, daß es jetzt keine Pessimisten mehr gibt.

Meine Absicht ist nicht, die Pessimisten zu bekämpfen; es gibt ja keine mehr; wir wissen genau, daß die Mathematik in ihrer Entwicklung fortfährt, aber es handelt sich darum zu wissen: in welchem Sinne entwickelt sie sich?

Man wird mir antworten: „in jedem Sinne", und das ist zum Teil wahr; aber wenn es ganz wahr wäre, würde es ziemlich erschreckend sein. Unsere Reichtümer würden ungeheuer werden und ihre Anhäufung würde einen Wust bilden, der ebenso undurchdringlich wäre, wie es die unerkannte Wahrheit für den Unwissenden ist.

Der Geschichtsschreiber muß ebenso wie der Physiker eine Wahl zwischen den Tatsachen treffen; das Gehirn des Gelehrten, das nur eine Ecke des Weltalls beherrscht, kann niemals das ganze Weltall fassen; somit muß man unter den zahllosen Tatsachen, welche die Natur uns darbietet, einige beiseite lassen und andere beachten. Ebenso ist es, a fortiori, in der Mathematik; der Mathematiker kann ebensowenig die Unmasse aller sich ihm darbietenden Tatsachen behalten; um so weniger als er selbst, ich möchte fast sagen: seine Laune, diese Tatsachen geschaffen hat. Er selbst baut aus allen möglichen Teilen eine neue Kombination auf, indem er die einzelnen Elemente jener Teile miteinander in Verbindung bringt; die Natur liefert ihm im allgemeinen diese Kombination nicht in fertigem Zustande.

Ohne Zweifel löst der Mathematiker hin und wieder ein Problem, um einem Bedürfnisse der Physik zu entsprechen, oder der Physiker, der Ingenieur, ersuchen ihn hin und wieder, zum Zwecke irgendeiner Anwendung eine gewisse Zahl zu berechnen. Darf man deshalb sagen, daß wir Mathematiker uns darauf beschränken müßten, den Befehlen anderer zu dienen, daß wir unsere Wissenschaft nicht nur zu unserem Vergnügen treiben dürften und kein anderes Verlangen haben sollten, als uns dem Geschmacke unserer Klienten anzupassen? Wenn die Mathematiker wirklich kein anderes Ziel haben als diejenigen zu unterstützen, welche die Natur studieren, dann müßten wir die Befehle dieser letzteren abwarten. Kann eine solche Auffassungsweise gerechtfertigt werden? Sicherlich nicht; wenn wir die exakten Wissenschaften nicht um ihrer selbst willen betrieben hätten,

so wäre das herrliche Hilfsmittel, das wir in der Mathematik besitzen, niemals geschaffen worden, und in dem Momente, wo die Anforderungen der Physiker an uns herangetreten wären, hätten wir hilflos dagestanden.

Die Physiker warten auch nicht, wenn sie eine Erscheinung studieren, bis irgendein dringendes Bedürfnis des materiellen Lebens sie dazu treibt, und sie haben recht; wenn die Gelehrten des achtzehnten Jahrhunderts die Elektrizität nur als eine Kuriosität angesehen und dieselbe deshalb vernachlässigt hätten, so besäßen wir im zwanzigsten Jahrhundert weder Telegraphie noch Elektrochemie noch Elektrotechnik. Somit werden die Physiker, wenn sie zu wählen gezwungen sind, bei ihrer Wahl nicht allein durch die Nutzanwendung geleitet. Wie sollen sie nun zwischen den natürlichen Tatsachen wählen? Wir haben es im vorhergehenden Kapitel erklärt; die Tatsachen, welche die Physiker interessieren, sind diejenigen, welche zur Entdeckung eines Gesetzes führen können; es sind somit solche, welche vielen anderen Tatsachen analog sind und welche deshalb nicht vereinzelt erscheinen, sondern eng verknüpft mit anderen Tatsachen. Die vereinzelte Tatsache fällt in die Augen, bei Laien wie bei Gelehrten. Aber was der wahre Physiker allein zu sehen versteht, das ist das Band, welches verschiedene Tatsachen, deren Analogie tief, aber verborgen ist, verknüpft. Die Anekdote vom Apfel Newtons ist wahrscheinlich nicht wahr, aber sie ist symbolisch; wir wollen von ihr sprechen, als wenn sie wahr wäre. Wir wollen also annehmen, daß die Menschen lange vor Newton Äpfel von den Bäumen fallen sahen: aber niemand hat daraus eine Schlußfolgerung gezogen. Die Tatsachen an sich sind unfruchtbar; es muß befähigte Geister geben, welche unter den Tatsachen eine Wahl treffen und diejenigen unterscheiden, hinter welchen sich etwas verbirgt; sie müssen erkennen, was das ist, was sich dahinter verbirgt; das sind jene Geister, welche hinter der nackten Tatsache die Seele der Tatsache spüren.

Ebenso machen wir es in der Mathematik; aus den verschiedenen Elementen, die wir kennen, können wir Millionen von verschiedenen Kombinationen ableiten; aber sobald eine dieser Kombinationen vereinzelt bleibt, hat sie jeden Wert verloren; wir haben uns viel Mühe gegeben, die Kombination zu bilden, aber das führt zu nichts, höchstens liefert es eine Hausaufgabe für den Gymnasialunterricht. Ganz anders verhält es sich, wenn diese Kombination einen Platz in einer Abteilung von analogen Kombinationen einnimmt, und wenn wir diese Analogie erkannt haben; dann stehen wir nicht mehr einer Tatsache, sondern einem Gesetze gegenüber. Dann wird der wirkliche Erfinder nicht mehr als ein Handwerker gelten, welcher geduldig eine dieser Kombinationen aufbaute, sondern er wird klar ihren Zusammenhang mit verwandten Kombinationen erwiesen haben. Als Handwerker hätte er nur die nackte Tatsache vor sich gesehen, als Erfinder hat er die Seele der Tatsache herausgefühlt. Oft muß er, um den betreffenden Zusammenhang klarzulegen, ein neues Wort erfinden, und dieses Wort wirkt dann schöpferisch; die Geschichte der Wissenschaft liefert uns dafür eine Menge von Beispielen, die wir alle kennen.

Der berühmte Wiener Philosoph Mach äußerte[1]), daß es die Aufgabe der Wissenschaft wäre, die Ökonomie des Denkens zu fördern, so gut, wie die Maschine die Ökonomie der Arbeit bedingt. Das ist sehr wahr. Der Wilde rechnet, indem er an den Fingern abzählt oder kleine Steine zusammenhäuft. Wenn wir den Kindern die Multiplikationstabellen beibringen, ersparen wir ihnen für später zahllose Rechnungsmanöver mit Steinen. Früher erkannte jemand, mit Hilfe von Steinen oder auf andere Art, daß $6 \times 7 = 42$ ist, und hatte die gute Idee, dieses Resultat aufzuschreiben, und deshalb brauchen wir dasselbe nicht von neuem auszurechnen. Der Betreffende hat seine Zeit nicht verloren, auch wenn er nur zu seinem Vergnügen rechnete; sein Verfahren erforderte vielleicht nur zwei Minuten; im ganzen wären zwei

Milliarden Minuten zu der Arbeit nötig gewesen, wenn eine Milliarde Menschen wieder damit hätte anfangen müssen.

Die Wichtigkeit einer Erfindung richtet sich also nach ihrem Nutzeffekt, d. h. nach der Quantität an Denken, die sie uns erspart.

In der Physik ergeben diejenigen Tatsachen den größesten Nutzeffekt, welche sich einem allgemeinen Gesetze unterordnen lassen, denn sie gestatten uns, eine große Zahl anderer Tatsachen vorauszusagen, und ebenso ist es in der Mathematik. Wenn ich eine komplizierte Rechnung durchgeführt habe und mit großer Mühe zu einem Resultat gelangt bin, so wäre meine Arbeit doch vergeblich gewesen, wenn ich dadurch nicht die Fähigkeit erlangt hätte, die Resultate anderer analoger Rechnungen vorauszusehen und diese Rechnungen mit sicherem Gefühl so zu dirigieren, daß all jenes Umhertasten vermieden wird, auf das ich bei Ausführung der ersten Rechnung angewiesen war. Ich hätte nicht vergebens gearbeitet, wenn gerade dieses Umhertasten mir die tiefe Analogie des soeben behandelten Problems mit einer weit ausgedehnteren Klasse anderer Probleme offenbart hätte, wenn ich dadurch zugleich die Ähnlichkeiten und die Unterschiede erkannt hätte: kurz, wenn ich dadurch die Möglichkeit einer Verallgemeinerung erkannt hätte. Also nicht ein neues Resultat hätte ich dann gewonnen, sondern eine Quelle neuer Kraft.

Als einfaches Beispiel hierfür bietet sich uns die algebraische Formel dar: wenn man in ihr schließlich alle Buchstaben durch Zahlen ersetzt, so gibt sie uns die Lösung eines ganzen Typus von numerischen Aufgaben. Einer solchen Formel haben wir es zu danken, wenn uns eine einzige algebraische Rechnung die Mühe erspart, bei neuen numerischen Rechnungen immer wieder von vorne anzufangen. Aber das ist nur ein plumpes Beispiel; wie allgemein bekannt ist, gibt es Analogien, die sich nicht durch eine Formel ausdrücken lassen und die gerade am wertvollsten sind.

Wenn ein neues Resultat Wert hat, d. h. wenn es längst bekannte, aber bis dahin unsicher und befremdend erscheinende Elemente miteinander verbindet, so führt das Resultat plötzlich da eine Ordnung ein, wo bis jetzt Unordnung herrschte. Das Resultat erlaubt uns dann mit einem Blick jedes dieser Elemente und den Platz, den es in der Gesamtheit einnimmt, klar zu übersehen. Diese neue Tatsache ist an sich selbst nicht wertvoll, dennoch gibt sie allein allen anderen Tatsachen, welche sie miteinander verknüpft, ihren Wert. Unser Verstand ist ebenso unzulänglich wie unsere Sinne, er würde sich in der Zusammengesetztheit der Welt völlig verlieren, wenn diese Zusammengesetztheit nicht eine harmonische wäre; er würde darin, gleich einem Kurzsichtigen, nur die Details sehen, um jedes dieser Details aus dem Gedächtnisse zu verlieren, noch bevor er das nächstliegende prüft, weil sein Auge unfähig ist, das Ganze zu überblicken. Die einzigen unserer Aufmerksamkeit würdigen Tatsachen sind diejenigen, welche in die erwähnte Zusammengesetztheit Ordnung einführen und sie uns somit zugänglich machen.

Die Mathematik liebt in ihren Methoden und in ihren Resultaten die Eleganz; das ist durchaus kein Dilettantismus. Was verleiht uns nun das Gefühl der Eleganz in einer Lösung oder in einer Beweisführung? Es ist die Harmonie der verschiedenen Teile, ihre Symmetrie, ihr schönes Gleichgewicht; in einem Wort: alles, was Ordnung schafft, alles, was die Teile zur Einheit führt; alles, was uns erlaubt, die Dinge klar zu sehen und sowohl das Ganze wie auch zu gleicher Zeit die Details zu überblicken. Zugleich mit der Eleganz bringt das auch große Vorteile mit sich und wirklich, je klarer wir die Gesamtheit mit einem Blick übersehen, desto besser bemerken wir die Analogien mit anderen, benachbarten Objekten, desto mehr haben wir folglich Aussicht, die möglichen Verallgemeinerungen zu erraten. Das Gefühl der Eleganz kann dadurch bedingt sein, daß

wir unerwartet Objekten begegnen, die man für gewöhnlich nicht antrifft; hier ist sie fruchtbar, weil sie uns bis dahin unerkannte Verbindungen aufdeckt; sie ist selbst da fruchtbar, wenn sie sich nur aus dem Gegensatze zwischen der Einfachheit der Mittel und der Zusammengesetztheit des gestellten Problems ergibt; sie veranlaßt uns alsdann über die Ursache dieses Gegensatzes nachzudenken, und oft genug zeigt sie uns, daß diese Ursache nicht zufällig ist und daß wir sie in irgendwelchem nicht erwarteten Gesetze finden. Kurz, das Gefühl der mathematischen Eleganz ist nichts anderes als die Befriedigung, welche uns eine gewisse Übereinstimmung zwischen der gefundenen Lösung und den Bedürfnissen unseres Geistes bietet, und auf Grund dieser Übereinstimmung kann uns die Lösung als neues Werkzeug dienen. Darum ist die ästhetische Befriedigung mit der Ökonomie des Denkens eng verbunden. Wieder kommt mir der Vergleich mit dem Erechtheion in den Sinn, aber ich will ihn nicht zu oft anwenden.

Aus demselben Grunde sind wir, wenn eine lange Berechnung uns zu einem einfachen und schlagenden Beweise geführt hat, nicht eher zufrieden, als bis wir erkannt haben, daß wir, wenn auch nicht das ganze Resultat, so doch wenigstens seine charakteristischsten Merkmale hätten voraussehen können. Weshalb das? Was hindert uns daran, uns mit einer Berechnung zu begnügen, welche uns, dem Anschein nach, alles lehrt, was wir zu wissen wünschten? Wir dürfen uns deshalb mit der bloßen Rechnung nicht zufrieden geben, weil wir in analogen Fällen die lange Rechnung nicht nochmals anwenden können; ganz anders bei einer mehr anschauungsmäßigen Begründung, welche uns das Voraussehen gestattet hätte! Wenn diese anschauungsmäßige Begründung kurz ist, so überblickt man auf einmal alle ihre Teile, und zwar dergestalt, daß man sogleich sieht, wie man sie verändern muß, um sie für alle ähnlichen Probleme, die auftauchen könnten, anzuwenden. Und weil die

Begründung uns gestattet vorauszusehen, ob die Lösung der Probleme einfach sein wird, zeigt sie uns zum mindesten, ob es lohnt, die Rechnung zu beginnen.

Was wir hier erwähnten, genügt, um zu beweisen, wie vergeblich es wäre, die freie Initiative des Mathematikers durch irgendeinen mechanischen Vorgang ersetzen zu wollen. Es genügt nicht, Rechnungen durchzukauen oder eine Maschine zum Anordnen der Dinge in Bewegung zu setzen, um ein wirklich wertvolles Resultat zu erzielen; nicht die Ordnung an sich, sondern die unverhofft gefundene Ordnung ist von Wert. Die Maschine kann die nackte Tatsache verarbeiten, mit der Seele der Tatsache kann sie nichts anfangen.

Seit Mitte des letzten Jahrhunderts sind die Mathematiker immer mehr bestrebt, absolute Strenge zu erreichen; sie haben recht damit, und dieses Bestreben wird noch immer mehr hervorgehoben werden. Die Strenge in der Mathematik bedeutet nicht alles, aber ohne sie ist nichts möglich; eine Beweisführung ohne Strenge ist hinfällig. Ich glaube, niemand wird diese Wahrheit anzweifeln. Wenn man sie jedoch zu wörtlich nimmt, so kommt man zu der Ansicht, daß es vor etwa 1820 keine Mathematik gab; das hieße allerdings offenbar übertreiben; die Mathematiker dieser früheren Zeit setzten stillschweigend voraus, was wir mit weitschweifigen Auseinandersetzungen erläutern; damit soll nicht gesagt sein, daß sie die Schwierigkeiten überhaupt nicht sahen; aber sie schritten zu schnell darüber hinweg; um sie richtig zu erkennen, hätten sie sich der Mühe unterziehen müssen, sie klar auszusprechen.[2])

Nur ist es nicht immer nötig, sie so oft auszusprechen; diejenigen, welche sich zuerst mit der Strenge in den Beweisen beschäftigten, haben uns Schlußketten überliefert, die uns als Vorbild dienen können; aber wenn alle Beweise der Zukunft nach diesen Vorbildern aufgebaut werden sollten, so würden die Lehrbücher der Mathematik zu dickleibig werden, und das fürchte ich nicht nur, weil ich vor der Über-

füllung der Bibliotheken erschrecke, sondern weil ich der Meinung bin, daß gar zu lang gewordene Beweise jene Harmonie verlieren, deren Nützlichkeit ich soeben auseinandersetzte.

Man muß dabei die Ökonomie des Denkens im Auge behalten; es genügt nicht, nachahmenswerte Vorbilder aufzustellen. Man muß sich später von diesen Vorbildern freimachen und die schon gemachten Schlußketten in wenigen Linien zusammenfassen können, ohne sie jedesmal ganz zu wiederholen. In einigen Fällen hat man schon mit Erfolg in diesem Sinne gearbeitet; man kannte z. B. einen gewissen Typus von Schlußketten, die alle einander ähnlich waren und die man oft anzuwenden hatte; sie waren vollkommen streng, aber sehr lang. Eines Tages erdachte man das Wort „Gleichförmigkeit der Konvergenz", und dies eine Wort hat jene Schlußketten überflüssig gemacht; man hat nicht mehr nötig, sie zu wiederholen, weil man sie jetzt stillschweigend voraussetzen darf. Diejenigen, welche scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten beseitigen, können uns also einen doppelten Dienst erweisen: erstens, indem sie uns lehren bei passender Gelegenheit ebenso vorzugehen, wie sie, besonders aber, indem sie uns erlauben, möglichst oft anders vorzugehen, wie sie, wenn nur dabei an Strenge nichts verloren geht.[8])

Soeben habe ich ein Beispiel dafür angeführt, wie wichtig Worte in der Mathematik sind; ich könnte noch manches Beispiel zitieren. Es ist kaum glaublich, wie sehr ein wohlgewähltes Wort Denken sparen kann, wie Mach bereits sagt. Ich weiß nicht, ob ich an einer Stelle schon erwähnte, daß die Mathematik die Kunst ist, scheinbar verschiedenen Dingen denselben Namen zu geben. Nur müssen diese Dinge, wenn sie auch an Inhalt verschieden sind, in der äußeren Erscheinung sich ähnlich sein, und sie müssen sozusagen in dieselbe Form gegossen werden können. Wenn die Ausdrucksweise gut gewählt ist, so wird man mit Erstaunen be-

merken, wie alle Beweisführungen, die für ein bekanntes Objekt gemacht werden, sofort auf viele neue Objekte anwendbar sind; man braucht nichts zu ändern, nicht einmal die Worte, weil die Benennungen die gleichen geworden sind.

Oft genügt ein wohl gewähltes Wort um die Ausnahmen verschwinden zu lassen, welche die in der früheren Ausdrucksweise aufgestellten Gesetze mit sich brachten; deshalb hat man negative Größen, imaginäre Größen, unendlich ferne Punkte erdacht, und wer weiß, was noch alles. Dabei ist nicht zu vergessen, daß die Ausnahmen schädlich sind, weil sie die Gesetze verbergen.

Eines der Merkmale, an denen man die Tatsachen von großem Nutzeffekt erkennt, besteht darin, daß sie die erwähnten glücklichen Neuerungen der Ausdrucksweise zulassen. Die nackte Tatsache ist dann manchmal ohne besonderes Interesse, man kann oft auf sie hinweisen, ohne der Wissenschaft damit einen großen Dienst zu leisten; sie hat erst Wert, wenn eines Tages ein geübterer Denker die Verwandtschaft mit anderen Tatsachen erkennt, sie klar darstellt und durch ein Wort symbolisiert.

Die Physiker handeln ebenso; sie erfanden das Wort Energie und dieses Wort war von erstaunlicher Fruchtbarkeit, denn es schuf ebenfalls ein Gesetz, indem es Ausnahmen beseitigte, und es ermöglichte eine gleiche Benennung für Dinge, die inhaltlich verschieden, in der äußeren Erscheinung aber ähnlich sind.

Unter den Worten, welche von günstigstem Einflusse waren, erwähne ich „Gruppe" und „Invariante". Sie ließen uns das wahre Wesen von vielen mathematischen Beweisen erkennen; sie zeigten uns, in wie vielen Fällen die alten Mathematiker Gruppen anwandten, ohne es zu wissen, und wie sie sich plötzlich, ohne den Grund zu erkennen, einander näherten, obgleich sie sich weit voneinander entfernt glaubten.

Wir würden heute darauf hinweisen, daß sie isomorphe Gruppen betrachtet haben. Wir wissen jetzt, daß der Inhalt einer Gruppe uns wenig interessiert, daß lediglich die Form Bedeutung hat und daß, wenn man eine Gruppe kennt, man dadurch auch alle isomorphen Gruppen kennt; dank den Worten „Gruppe“ und „Isomorphismus“, welche dieses scharfsinnige Gesetz in wenig Silben zusammenfassen und es allen völlig vertraut machen, ist der Übergang zu den isomorphen Gruppen unmittelbar und vollzieht sich, indem er jede Anstrengung des Denkens erspart. Der Begriff einer Gruppe hängt überall mit dem Begriff einer Transformation zusammen; warum legt man solchen Wert auf die Erfindung einer neuen Transformation? Weil sie uns mittels eines einzigen Theorems erlaubt, deren zehn oder zwanzig zu gewinnen; sie ist von gleichem Werte wie eine Null, wenn sie rechts an eine ganze Zahl gesetzt wird.[4])

All dieses hat bisher die Richtung des Fortschrittes in der Mathematik bestimmt und, es ist gewiß, daß es dieselbe auch ferner bestimmen wird. Dazu trägt auch die Natur der sich darbietenden Probleme bei. Wir dürfen nie unser Ziel aus dem Auge lassen; nach meiner Meinung ist dieses Ziel ein zweifaches; unsere Wissenschaft grenzt sowohl an die Philosophie als auch an die Physik, und für beide Nachbarn müssen wir arbeiten. In der Tat konnten wir immer beobachten, wie die Mathematiker stets in beiden entgegengesetzten Richtungen fortschritten, und dasselbe werden wir auch in Zukunft beobachten.

Einesteils muß die mathematische Wissenschaft über sich selbst nachdenken, und das ist nötig, denn Nachdenken über sich selbst heißt in diesem Falle soviel wie: Nachdenken über den menschlichen Geist, der die Mathematik geschaffen hat, um so mehr, als es sich um diejenige seiner Schöpfungen handelt, für welche der menschliche Geist am wenigsten Anleihen von außen her gemacht hat. Deshalb sind gewisse mathematische Spekulationen von großem Nutzen, z. B. die-

jenigen, welche sich mit dem Studium der Postulate beschäftigen oder mit den nichteuklidischen und ähnlichen Geometrien, oder mit Funktionen von fremdartigen Eigenschaften. Je mehr sich diese Spekulationen von den gebräuchlicheren Vorstellungen, und folglich von der Natur und von den Anwendungen entfernen, um so besser zeigen sie uns, was der menschliche Geist zu leisten vermag, wenn er sich mehr und mehr der Tyrannei der äußeren Welt entzieht, um so besser werden wir folglich in der Lage sein, das Wesen dieses Geistes zu erkennen.

Das Gros unserer Armee müssen wir indessen nach der anderen Seite marschieren lassen, d. h. nach der Seite der Anwendungen in der Natur.

Da werden wir den Physiker und den Ingenieur antreffen, die uns fragen: „Könnt ihr mir diese Differentialgleichung integrieren, ich brauche sie in etwa acht Tagen für die und die Konstruktion, die an dem und dem Tage fertig sein muß.“ — „Diese Gleichung“, werden wir antworten, „gehört nicht zu einem der integrabeln Typen, ihr wißt doch, daß es deren nicht viele gibt.“ — „Das weiß ich sehr wohl, aber wozu seid ihr denn überhaupt da?“ — — Meistens wird man sich darüber verständigen; der Ingenieur braucht nämlich das Integral nicht in geschlossener Form; er braucht nur das allgemeine Verhalten der Integralfunktion zu kennen, oder er braucht vielleicht nur eine bestimmte Zahl zu wissen, die sich aus diesem Integrale leicht ableiten ließe, wenn man es kennen würde. Gewöhnlich kennt man es aber nicht; man würde indessen die verlangte Zahl auch so berechnen können, wenn man nur genau wüßte, welche Zahl der Ingenieur wissen will und mit welcher Genauigkeit sie berechnet werden soll.

Früher betrachtete man eine Gleichung nur dann als gelöst, wenn man ihre Lösung durch eine endliche Zahl von bekannten Funktionen ausgedrückt hatte; aber das ist kaum einmal in hundert Fällen möglich. Was wir aber immer lei-

sten können, oder vielmehr: was wir immer zu leisten versuchen müssen, das ist sozusagen die qualitative Lösung des Problems, d. h. die Bestimmung der Kurve, welche die gesuchte Funktion darstellt, in ihrer allgemeinen Gestalt.

Wir müssen ferner die quantitative Lösung des Problems finden; wenn die Unbekannte nicht durch eine endliche Rechnung bestimmt werden kann, so kann man sie doch immer durch eine unendliche konvergente Reihe darstellen, welche die Berechnung zuläßt. Kann man nun das als eine wirkliche Lösung ansehen? Man erzählt sich, daß Newton an Leibniz ein Anagramm schickte, das ungefähr so lautete: *aaaaabbbeeeeii*, usw. usw. Leibniz verstand das natürlich nicht, wir aber wissen jetzt, daß dieses Anagramm in das Moderne übersetzt heißen soll: „Ich kann alle Differentialgleichungen integrieren", und wir müssen voraussetzen, daß Newton entweder Aussicht dazu hatte oder sich sonderbare Illusionen machte. Er wollte mit seinem Anagramm ganz einfach ausdrücken, daß er (mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten) eine Potenzreihe bilden konnte, welche formell der vorgeschlagenen Gleichung genügte.

Heute würde uns eine ähnliche Lösung nicht mehr genügen, und zwar aus zwei Gründen: weil die Konvergenz zu langsam ist und weil die Glieder aufeinander folgen ohne irgendeinem Gesetze zu gehorchen. Dagegen z.B. die Θ-Reihe läßt nichts zu wünschen übrig, erstens, weil sie sehr schnell konvergiert (das ist für den Praktiker wichtig, welcher seine Zahl sehr genau wünscht) und dann, weil wir mit einem Blick das Gesetz der Glieder übersehen (damit ist dem ästhetischen Bedürfnisse des Theoretikers Genüge getan).

Dann aber gibt es keine lösbaren und keine unlösbaren Probleme mehr; es gibt nur mehr oder weniger lösbare Probleme, je nachdem sie durch eine schneller oder langsamer konvergierende Reihe gelöst werden, oder durch ein mehr oder minder harmonisches Gesetz erzeugt werden. Es kommt immer vor, daß eine unvollkommene Lösung zu einer

besseren Lösung führt. Manchmal ist eine Reihe von so langsamer Konvergenz, daß die Berechnung unanwendbar ist und man nur zu dem Beweis der Möglichkeit eines Problems gelangt.[5])

Über dergleichen spottet nun wohl der Ingenieur, und er hat ja auch ein Recht dazu, weil ihm das alles nicht dazu verhilft, seine Konstruktion zu einem bestimmten Termine fertig zu stellen. Er kümmert sich wenig darum, ob dies oder jenes für die Ingenieure des 22. Jahrhunderts von Nutzen sein wird; wir denken aber anders und fühlen manchmal eine größere Befriedigung, wenn wir unseren Enkelkindern einen Arbeitstag erspart haben, als wenn wir unseren Zeitgenossen eine Stunde erspart hätten.

Manchmal gelangen wir durch unsicheres Umhertasten, gewissermaßen empirisch, zu einer genügend konvergierenden Formel. Was verlangt ihr denn mehr? fragt der Ingenieur, wir aber sind trotzdem nicht zufrieden, wir haben diese Konvergenz voraussehen wollen. Warum? Wenn wir die Konvergenz einmal vorausgesehen haben, so können wir hoffen, sie ein anderes Mal auch vorauszusehen. In unseren Augen gilt es wenig, daß uns eine Sache einmal gelungen ist; wir wollen die Hoffnung haben, daß sie uns ein andermal auch gelingen kann.

In dem Maße, in dem sich die Wissenschaft weiter entwickelt, wird es immer schwieriger, ihr Gebiet ganz zu überblicken; deshalb versucht man sie in Stücke zu zerlegen, um sich mit einem dieser Stücke zu begnügen: kurz, man wird Spezialist. Wenn man in diesem Sinne fortfährt, so würde dadurch der Fortschritt der Wissenschaft ernstlich gefährdet werden. Wir sprachen eben davon, daß die Wissenschaft gerade durch die unerwarteten Beziehungen zwischen ihren verschiedenen Gebieten fortschreitet. Sich zu sehr spezialisieren hieße sich gegen diese Beziehungen verschließen. Hoffen wir, daß Kongresse wie der von Heidelberg und Rom uns weitere Ausblicke auf benachbarte Felder eröffnen, in-

dem sie die Gelehrten in Verbindung zueinander bringen, hoffen wir, daß uns diese Zusammenkünfte nötigen, das wissenschaftliche Gebiet eines Kollegen mit dem unseren zu vergleichen, und wir so gezwungen werden, aus unserem engen Bereich herauszugehen; somit würden die Kongresse zum besten Hilfsmittel gegen die Gefahr werden, über die ich soeben meine Befürchtungen äußerte.[6])

Ich habe mich zu lange mit Allgemeinheiten aufgehalten; es ist Zeit, auf Einzelheiten einzugehen.

Wir wollen die verschiedenen besonderen wissenschaftlichen Abteilungen, deren Ganzes die Mathematik ausmacht, an uns vorbeiziehen lassen; wir wollen beobachten, was jede dieser Abteilungen geleistet hat, wohin sie strebt und was wir von ihr erwarten können. Wenn unsere Voraussetzung richtig war, so müssen wir sehen, daß die großen Fortschritte der Vergangenheit dadurch entstanden, daß zwei Wissenschaften sich einander näherten, dadurch, daß man sich der Ähnlichkeit ihrer Form bewußt wurde trotz der Verschiedenartigkeit ihres Gegenstandes; dadurch endlich, daß eine sich der andern so anpaßte, daß die eine von den Errungenschaften der andern Nutzen ziehen konnte. Wir müssen dann zugleich aus den Beziehungen derselben Art zueinander die Fortschritte, welche die Zukunft bringt, einigermaßen voraussehen.

Die Arithmetik.

Die Fortschritte der Arithmetik waren viel langsamer als diejenigen der Algebra und Analysis; der Grund ist einleuchtend. Das Gefühl der Stetigkeit ist ein wertvoller Führer, der dem Arithmetiker fehlt; jede ganze Zahl ist von den übrigen getrennt, sie behauptet sozusagen ihre eigene Individualität; jede dieser ganzen Zahlen bildet eine Art Ausnahme; deshalb sind die allgemeinen Theoreme in der Zahlentheorie seltener als in anderen Gebieten der Mathematik; deshalb werden auch diejenigen allgemeinen Sätze,

welche bestehen, versteckter sein und längere Zeit den Forschern entgehen.

Wenn die Arithmetik gegenüber der Algebra und Analysis im Rückstand ist, so kann sie nichts Besseres tun als versuchen, sich diesen Wissenschaften anzupassen, um von ihren Fortschritten Nutzen zu ziehen. Der Arithmetiker muß sich also die Analogien mit der Algebra zum Führer wählen. Diese Analogien sind zahlreich und wenn sie, was vielfach der Fall ist, noch nicht genügend durchstudiert sind, um anwendbar zu sein, so werden sie zum mindesten seit längerer Zeit vorausgeahnt, und sogar die Ausdrucksweise der beiden Wissenschaften beweist, daß man sie bemerkt hat. So spricht man beispielsweise von transzendenten Zahlen und gibt sich Rechenschaft davon, daß die künftige Klassifikation dieser Zahlen schon die Klassifikation der transzendenten Funktionen zum Vorbild hat, und dennoch sieht man noch nicht klar, welcher Weg von der einen Klassifikation zur anderen führt; aber wenn man diesen Übergang schon gesehen hätte, so wäre die Arbeit schon getan und man brauchte sie nicht mehr der Zukunft zu überlassen.

Das erste Beispiel, das mir in den Sinn kommt, ist die Theorie der Kongruenzen, bei denen man einen vollkommenen Parallelismus mit der Theorie der algebraischen Gleichungen findet. Selbstverständlich wird man dazu gelangen, diesen Parallelismus, welcher z. B. zwischen der Theorie der algebraischen Kurven und der Theorie der Kongruenzen von zwei Variablen besteht, näher ins Auge zu fassen. Und wenn die Probleme, welche sich auf die Kongruenzen von mehreren Variablen beziehen, gelöst sind, so wird das der erste Schritt zur Lösung vieler Fragen in der unbestimmten Analysis sein.[7])

Die Algebra.

Die Theorie der algebraischen Gleichungen wird noch lange das Interesse der Mathematiker fesseln; man kann in

die Theorie dieser Gleichungen von verschiedenen Seiten eindringen.

Man darf nicht glauben, daß die Algebra erschöpft ist, wenn sie uns mit Regeln zur Bildung aller überhaupt möglichen Kombinationen versorgt; wir müssen noch die interessanten Kombinationen aussuchen, d. h. diejenigen, welche der oder jener Bedingung genügen. Dadurch würde sich eine Art von unbestimmter Analysis herausbilden, wo die Unbekannten nicht mehr ganze Zahlen, sondern Polynome sind. Auf diese Art würde sich die Algebra auf die Arithmetik stützen, indem sie sich durch die Analogie der ganzen Zahl leiten läßt, sei es durch das ganze Polynom mit beliebigen Koeffizienten oder durch das ganze Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten.[8])

Die Geometrie.

Es hat den Anschein, als könnte die Geometrie nichts enthalten, was nicht schon in der Algebra oder in der Analysis mit inbegriffen wäre, als seien die geometrischen Tatsachen nichts anderes als die algebraischen oder analytischen Tatsachen, nur in einer anderen Sprache ausgedrückt. Man könnte glauben, daß uns nach der Überschau, die wir soeben gehalten haben, nichts zu sagen übrig bliebe, was sich speziell auf die Geometrie bezöge. Das hieße die Wichtigkeit einer wohlgefügten Sprache verkennen, das hieße nicht verstehen, was diese Sprache den Dingen selbst durch die Art, diese Dinge auszudrücken, und durch die Art ihrer Gruppierung hinzufügt.

Vorerst führen uns die geometrischen Betrachtungen zu neuen Problemen; das sind allerdings, wenn man's so nennen will, analytische Probleme, aber solche, auf die man, von der Analysis ausgehend, nie gekommen wäre. Die Analysis ihrerseits zieht von diesen Problemen in gleicher Weise Nutzen, wie sie es bei den physikalischen Problemen tut, zu deren Lösung sie herangezogen wird.

Ein großer Vorteil der Geometrie beruht darin, daß bei ihr die Sinne den Gedanken unterstützen können und daß wir durch ihre Hilfe den Weg erraten, den wir einzuschlagen haben; deshalb suchen auch viele Forscher die Probleme der Analysis in eine geometrische Form zu kleiden. Unglücklicherweise können unsere Sinne uns nicht sehr viel dabei helfen; sie lassen uns im Stich, sobald wir uns über die klassischen drei Dimensionen erheben wollen. Muß man deshalb zugeben, daß wir an dieses enge Gebiet gebunden sind, in welches uns die Sinne einengen wollen, und daß wir darüber hinaus uns nur auf die Analysis verlassen dürfen, daß also jede Geometrie von mehr als drei Dimensionen gegenstandslos und überflüssig sei? Eine Generation früher hätten die größesten Meister diese Frage mit „Ja" beantwortet; heute ist uns die Vorstellung einer vierten Dimension so vertraut, daß wir selbst in einer Universitätsvorlesung davon sprechen können, ohne großes Aufsehen zu erregen.

Wozu soll nun die mehrdimensionale Geometrie dienen? Das ist leicht zu beantworten: erstens dient sie uns als sehr bequeme Sprache, um in gedrängten Worten das auszudrücken, was die gewöhnliche Sprache der Analysis nur in weitläufigen Sätzen zu sagen wüßte. Zweitens erlaubt uns diese Sprache ähnliche Dinge mit gleichem Namen zu belegen und weist dadurch auf Analogien hin, die sich auf diese Weise in unserem Gedächtnisse einprägen. Ferner verschafft sie uns die Möglichkeit, uns in diesem für uns zu großen Raume zu bewegen, den wir nicht mit dem Auge messen können; die Ausdrucksweise erinnert uns unaufhörlich an den sichtbaren Raum, welcher ein zwar unvollkommenes Bild, aber doch ein Bild des allgemeineren Raumes ist. Wie in all den vorhergehenden Beispielen, so läßt uns auch hier die Analogie mit dem Einfacheren das Kompliziertere verstehen.

Die Geometrie von mehr als drei Dimensionen ist nicht eine einfache analytische Geometrie, sie ist nicht rein

quantitativ, sie ist auch qualitativ, und dadurch gerade wird sie interessant. Es gibt eine Wissenschaft, Analysis Situs genannt, welche das Studium der Lagenbeziehungen zwischen den verschiedenen Elementen einer Figur zum Gegenstande hat und dabei die Größe dieser Elemente nicht berücksichtigt. Diese Geometrie ist rein qualitativ; ihre Sätze würden auch dann noch richtig bleiben, wenn die Figuren, auf welche sie sich beziehen, nicht genau gezeichnet, sondern nur in großen Umrissen, wie etwa von einem Kinde hingezeichnet, ausgeführt wären. Man kann auch eine Analysis Situs von mehr als drei Dimensionen schaffen. Die Wichtigkeit der Analysis Situs ist so außerordentlich, daß ich eigentlich länger bei ihr verweilen sollte; von dieser Wichtigkeit geben die Arbeiten Riemanns, dem der Ausbau dieser Wissenschaft hauptsächlich zu danken ist, einen Begriff. Man muß dahin kommen, sie in den höheren Räumen vollständig zu entwickeln; dann würde man ein Hilfsmittel haben, um auch im Überraum wirklich zu sehen und unseren Sinnen nachzuhelfen.[9])

Die Probleme der Analysis Situs hätte man sich wohl kaum gestellt, wenn man sich ausschließlich der analytischen Sprache bedient hätte; oder vielmehr, wie ich mich eigentlich ausdrücken sollte, man hätte sie sich ganz gewiß auch gestellt, denn ihre Lösung ist für eine Menge analytischer Fragen unerläßlich, aber man hätte sie einzeln, ein Problem nach dem andern, behandelt, ohne das gemeinsame Band zwischen ihnen zu erkennen.

Der Cantorismus.

Ich erwähnte vorhin, daß wir immer wieder das Bedürfnis fühlen, auf die ersten Grundlagen unserer Wissenschaft zurückzugehen, und ich sprach von dem Nutzen, den der forschende Geist des Menschen daraus zieht. Diesem Bedürfnisse verdanken wir zwei Versuche, welche einen außerordentlich großen Platz in der neueren Geschichte der Mathematik ein-

nehmen. Der erste Versuch ist der Cantorismus, welcher der Wissenschaft die jedem bekannten Dienste geleistet hat. Cantor führte in die Wissenschaft eine neue Art des mathematischen Unendlich ein und wir werden Gelegenheit haben, darauf zurückzukommen (vgl. das 3. Kap. im II. Buch). Ein charakteristischer Zug des Cantorismus besteht darin, vom genus supremum auszugehen und, wie die Scholastiker sagen würden, per genus proximum et differentiam specificam zu definieren, anstatt sich zur Allgemeinheit durch Aufbau immer schwierigerer Konstruktionen zu erheben und mittels der Konstruktion zu definieren. Diesem Vorgehen entstammt das Entsetzen, das er gewissen Gelehrten, wie z. B. Hermite, einflößte, der mit Vorliebe die Mathematik als eine Art von Naturwissenschaft betrachtete. Bei den meisten unter uns haben sich die Bedenken zerstreut, aber man hat doch an gewissen Paradoxen, an gewissen scheinbaren Widersprüchen Anstoß genommen, über welche ein Zenon von Elea und die Megarasche Schule gejubelt hätten. Und nun sucht jeder nach einem Heilmittel. Ich für mein Teil — und ich bin nicht der einzige — glaube, daß es einzig darauf ankommt nur solche Dinge einzuführen, welche man mit einer endlichen Anzahl von Worten vollkommen definieren kann. Bis nun ein Heilmittel endgültig angenommen wird, können wir uns dem Behagen des Mediziners hingeben, der zur Beobachtung eines schönen, pathologischen Falles gerufen wurde.[10])

Die Untersuchung der Postulate.

Man hat sich andererseits Mühe gegeben, die mehr oder weniger versteckten Axiome und Postulate aufzuzählen, welche den verschiedenen mathematischen Theorien als Grundlage dienen. Hilbert erreichte die glänzendsten Resultate. Anfänglich scheint es, als ob dieses Gebiet sehr begrenzt wäre und als ob man darin nichts weiter zu tun hätte, wenn das Inventar fertig ist, und das wird bald der Fall sein.

Aber wenn man alles aufgezählt hat, so gibt es noch viele Arten das alles zu klassifizieren; ein guter Bibliothekar findet immer Beschäftigung, und jede neue Klassifikation wird den Philosophen Belehrung bringen.[11])

Ich halte nun mit unserer Überschau inne, da ich nicht daran denken darf den Stoff zu erschöpfen. Ich nehme an, daß die angeführten Beispiele genügen um zu zeigen, durch welchen Mechanismus die mathematischen Wissenschaften in der Vergangenheit fortgeschritten sind und in welchem Sinne sie sich in Zukunft weiter entwickeln werden.

Drittes Kapitel.

Die mathematische Erfindung.

Die Entwicklungsgeschichte der mathematischen Erfindung ist ein Problem, das den Psychologen das lebhafteste Interesse einzuflößen imstande ist. Die mathematische Erfindung ist ein Akt, bei welchem der menschliche Geist der Außenwelt am wenigsten zu entnehmen scheint, bei dem er nur durch sich selbst oder aus sich selbst handelt oder zu handeln scheint, und zwar in einem solchen Grade, daß uns das Studium der Vorgänge bei dem mathematischen Denken die wesentlichsten Eigenschaften des menschlichen Geistes offenbart, die wir überhaupt zu ergründen hoffen dürfen.

Man hat sich das schon lange klar gemacht, und vor einigen Monaten hat die unter dem Titel L'Enseignement Mathématique von Laisant und Fehr herausgegebene Zeitschrift eine Enquete über die Geistesgewohnheiten und Arbeitsmethoden verschiedener Mathematiker angestellt. Ich hatte die Hauptzüge des gegenwärtigen Kapitels entworfen, bevor die Resultate dieser Enquete veröffentlicht waren; ich konnte von derselben daher keinen Gebrauch machen, und ich beschränke mich darauf hervorzuheben, daß die Majorität der eingelaufenen Antworten meine Behauptungen be-

stätigt; es herrschte allerdings keine Einstimmigkeit, das kann man auch nicht erwarten, wenn man eine Abstimmung auf Grund des allgemeinen und gleichen Stimmrechtes herbeiführt.

Ich habe eine Frage zu stellen, die unsere Verwunderung erregt oder wenigstens erregen müßte, wenn wir nicht zu sehr an die zu erwähnende Tatsache gewöhnt wären: Wie kommt es, daß es Leute gibt, welche keine Mathematik verstehen? Wenn die Mathematik nur auf denjenigen Regeln der Logik beruht, welche von jedem normal veranlagten Kopfe angenommen sind, wenn die Evidenz der Mathematik auf Grundlagen beruht, die allen Menschen gemeinsam sind und die nur ein Narr leugnen könnte: wie ist es dann zu erklären, daß so viele Personen in mathematischer Beziehung vollkommen versagen?

Daß nicht jeder zu neuen Entdeckungen befähigt ist, gilt als selbstverständlich. Daß nicht jeder einen einmal gelernten Beweis behalten kann, ist noch begreiflich. Daß aber nicht jeder eine mathematische Entwicklung in dem Momente versteht, in dem man sie ihm auseinandersetzt, das erscheint uns bei näherem Nachdenken sehr überraschend. Und doch bilden diejenigen, welche dieser Entwicklung nur mit Mühe folgen können, die Mehrzahl: das ist außer Frage, und die Erfahrung der Gymnasiallehrer wird dem sicher nicht widersprechen.

Aber noch mehr: Wie ist in der Mathematik ein Irrtum möglich? Ein gesunder Verstand darf keinen logischen Fehler machen, und doch gibt es sehr feine Köpfe, welche bei einer kurzen Reihe von Schlußfolgerungen, wie man sie im täglichen Leben zu machen hat, nicht stolpern, welche aber unfähig sind, den Beweisen der Mathematiker zu folgen, oder sie ohne Fehler zu wiederholen; diese längeren Beweise sind doch schließlich nichts anderes als eine Anhäufung kurzer Schlußfolgerungen ganz analog denjenigen, welche im täglichen Leben so leicht gemacht werden. Brauche

ich hinzuzufügen, daß auch die Mathematiker nicht unfehlbar sind?

Die Antwort scheint mir selbstverständlich. Stellen wir uns vor, daß in einer langen Reihe von Syllogismen die Schlußfolgerungen des ersten als Voraussetzungen für die folgenden dienen: Wir werden dann jeden einzelnen Syllogismus vollkommen erfassen können und auch beim Übergange von einer Voraussetzung zu einer Schlußfolgerung laufen wir nicht Gefahr uns zu täuschen. Aber zwischen dem Momente, wo wir einer Behauptung als Schluß eines Syllogismus zum ersten Male begegnen, und dem Momente, wo wir sie als Voraussetzung eines andern Syllogismus wiederfinden, wird manchmal eine gewisse Zeit verstrichen sein, während welcher zahlreiche Glieder der Kette abgelaufen sind; dadurch kann es vorkommen, daß man jene Behauptung vergessen hat oder, was noch schlimmer ist, daß man ihren eigentlichen Sinn vergessen hat. So kann es geschehen, daß man die Behauptung durch eine von ihr wenig verschiedene andere Behauptung ersetzt, oder daß man zwar den Wortlaut der Behauptung beibehält, ihr aber einen etwas verschiedenen Sinn unterlegt, und darin liegt dann die Quelle des Irrtums.

Oft muß sich der Mathematiker einer bestimmten Regel bedienen: diese Regel hat er natürlich zuerst genau bewiesen; und solange dieser Beweis ganz frisch in seiner Erinnerung haftete, verstand er den Sinn und die Tragweite der Regel vollkommen und er lief nicht Gefahr, sie zu verletzen. Aber später hat er sie seinem Gedächtnisse eingeprägt und wendet sie nur noch mechanisch an; wenn ihn dann sein Gedächtnis im Stiche läßt, so kann es geschehen, daß er sie verkehrt anwendet. So kann man, um ein einfaches und ganz gewöhnliches Beispiel anzuführen, manchmal Rechenfehler machen, weil man das Einmaleins vergessen hat.

Hiernach würde die besondere Veranlagung der Mathematiker nur auf einem sicheren Gedächtnisse beruhen, oder

auf der Fähigkeit, die Aufmerksamkeit ganz besonders zu konzentrieren. Diese Art der Begabung wäre dieselbe wie die Begabung des Whistspielers, der die ausgespielten Karten im Gedächtnisse behält, oder, um eine Stufe höher zu steigen, wie die Begabung des Schachspielers, der eine sehr große Anzahl von Kombinationen in Betracht ziehen und im Gedächtnisse bewahren kann.[12]) Jeder gute Mathematiker müßte also zugleich ein guter Schachspieler sein können und umgekehrt; er müßte auch ein guter Zahlenrechner sein. Das kommt allerdings manchmal vor; so war Gauß z. B. zugleich der geniale Mathematiker und ein sehr schneller und sicherer Rechner.

Es gibt jedoch Ausnahmen; eigentlich allerdings sollte man hier nicht von Ausnahmen sprechen, denn sonst wären die Ausnahmen zahlreicher als die regulären Fälle. Gauß müssen wir als eine Ausnahme bezeichnen. Was mich betrifft, so muß ich gestehen, daß ich absolut unfähig bin, eine fehlerfreie Addition zu machen. Ich würde ebenfalls ein sehr schlechter Schachspieler sein; ich würde mir zwar überlegen, daß ich mich durch den oder jenen Zug der oder jener Gefahr aussetze; ich würde viele andere Züge in Betracht ziehen und diese etwa aus anderen Gründen verwerfen, und schließlich würde ich den zuerst ins Auge gefaßten Zug wirklich ausführen, da ich inzwischen vergessen hätte, welcher Gefahr ich mich dadurch aussetze.

Kurz, mein Gedächtnis ist nicht schlecht, aber es ist ungenügend, um aus mir einen guten Schachspieler zu machen. Weshalb läßt es mich dann aber nicht auch bei einer schwierigen mathematischen Überlegung im Stich, bei der die meisten Schachspieler Fehler begehen würden? Offenbar, weil mein Gedächtnis sich hier durch den allgemeinen Gang der Überlegung leiten läßt. Ein mathematischer Beweis ist nicht eine einfache Aufeinanderfolge von Syllogismen, sondern es handelt sich dabei um Syllogismen, die in eine gewisse Ordnung gebracht sind, und die Ordnung, in welcher

die einzelnen Elemente hier erscheinen, ist viel wichtiger als diese Elemente selbst. Wenn ich die Intuition, d. h. das Gefühl für diese Ordnung, besitze, so kann ich mit einem Blicke das Ganze der Beweisführung überschauen und brauche nicht zu fürchten, ein einzelnes Element zu vergessen; jedes Element wird sich von selbst an den Platz stellen, für den es bestimmt war, ohne daß ich irgendwie mein Gedächtnis anzustrengen brauchte.

Bei Wiederholung eines erlernten mathematischen Beweises kommt es mir vor, als hätte ich ihn selbst erfunden; das ist nur eine Illusion, aber selbst dann, wenn ich nicht stark genug bin, selbständig zu schaffen, so finde ich doch selbst den Beweis von neuem, während ich ihn wiederhole.

Nicht jeder kann offenbar diese Intuition, dieses Gefühl für mathematische Ordnung besitzen, welches uns verborgene Relationen und Harmonien erraten läßt. Die einen besitzen weder dies feine und schwer zu definierende Gefühl, noch eine über das Gewöhnliche hinausgehende Gedächtnisstärke und Konzentrationsfähigkeit, und dann sind sie gänzlich unfähig, über die Anfangsgründe hinaus mathematische Entwicklungen zu verstehen; zu dieser Klasse gehören die meisten Menschen. Andere haben das Gefühl für mathematische Ordnung nur in geringem Grade, aber sie verfügen über eine ungewöhnliche Gedächtnisstärke und über eine große Konzentrationskraft. Sie lernen die Einzelheiten nacheinander auswendig und können die Mathematik verstehen, manchmal auch anwenden, aber sie sind außerstande selbst etwas zu schaffen. Andere endlich besitzen die von mir erwähnte Intuition in größerem oder geringerem Grade und dann können sie die Mathematik nicht nur verstehen, selbst wenn ihr Gedächtnis nicht besonders stark ist, sondern sie können auch schöpferisch tätig sein und mit größerem oder geringerem Erfolge versuchen Neues zu finden, je nachdem ihre Intuitionsgabe mehr oder weniger entwickelt ist.

Worin besteht denn nun eigentlich die mathematische Erfindung? Sie beruht nicht darauf, daß neue Kombinationen mit schon bekannten mathematischen Dingen gemacht werden. Darauf kommt es auch schließlich nicht so an, denn die Kombinationen, die man bilden könnte, würden zahllos sein und die meisten wären ohne Interesse für uns. Erfinden heißt, klar ausgedrückt: Keine unnützen Kombinationen konstruieren, sondern nur diejenigen konstruieren, welche von Nutzen sind, und diese sind in denkbar größester Minorität vorhanden. Erfinden heißt ausscheiden, kurz gesagt: auswählen.

Wie man bei diesem Auswählen vorgeht, habe ich schon oben erklärt; diejenigen mathematischen Tatsachen, welche das Studium lohnen, sind solche, welche durch ihre Analogien mit anderen Tatsachen imstande sind, uns zur Kenntnis eines mathematischen Gesetzes zu führen; das geschieht also in derselben Weise, wie uns die experimentellen Tatsachen zur Kenntnis eines physikalischen Gesetzes führen. Es sind solche Tatsachen, welche uns unvermutete Verbindungen mit anderen Tatsachen offenbaren, die wir schon lange kennen, aber mit Unrecht als einander fremd hielten.

Unter den zu wählenden Kombinationen werden öfters diejenigen die fruchtbarsten sein, welche aus Elementen gebildet sind, die weit entfernten Gebieten entstammen; ich will damit nicht sagen, daß es zum „Erfinden“ genügt, einfach möglichst unzusammenhängende Objekte miteinander in Beziehung zu bringen; die meisten Kombinationen, die man so bilden würde, wären völlig unfruchtbar, aber einige unter ihnen, die allerdings selten zu finden sind, gehören zu den fruchtbringendsten von allen.

Erfinden heißt, wie ich bereits sagte: auswählen; das Wort ist vielleicht nicht ganz richtig; man denkt dabei unwillkürlich an einen Käufer, dem eine große Auswahl von Mustern vorgelegt wird, und welcher diese eines nach dem andern prüft, um seine Wahl zu treffen. In unserem Falle würden

die Muster so zahlreich sein, daß ein ganzes Menschenleben nicht genügen würde, um sie zu prüfen. So verhält sich die Sache nicht. Die unfruchtbaren Kombinationen werden von dem Geiste des Erfinders nicht beachtet. Ihm kommen nur die wirklich nutzbringenden Kombinationen zum Bewußtsein, und einige andere, die er zwar verwirft, die aber etwas vom Charakter dieser nutzbringenden Kombinationen an sich haben. Das spielt sich alles ab, als wäre der Erfinder ein Examinator zweiten Grades, der nur noch die auf Grund einer ersten Prüfung als fähig zugelassenen Kandidaten befragt.

Was ich hier gesagt habe, kann man selbst bei der Lektüre der mathematischen Schriften bestätigen, vorausgesetzt, daß man mit einiger Überlegung liest.

Es ist Zeit, tiefer in diese Frage einzudringen und zu sehen, was in der Seele des Mathematikers vorgeht. Dabei kann ich nichts Besseres tun, als persönliche Erinnerungen mir ins Gedächtnis zurückrufen. Ich will mich darauf beschränken, darzulegen, wie ich meine erste Abhandlung über die Fuchsschen Funktionen schrieb. Ich bitte um Entschuldigung, wenn ich einige technische Ausdrücke anwende; das darf den Leser nicht erschrecken, denn es ist ja für das Folgende nicht nötig, daß er diese Fachausdrücke versteht. Ich werde z. B. erzählen, daß ich dieses oder jenes Theorem unter gewissen Umständen gefunden habe; dies Theorem hat einen barbarischen Namen, den die meisten Leser nicht kennen werden, aber darauf kommt es hier gar nicht an: für den Psychologen ist nicht das Theorem interessant, sondern die Umstände, unter denen es gefunden wurde.

Seit vierzehn Tagen mühte ich mich ab, zu beweisen, daß es keine derartigen Funktionen gibt, wie doch diejenigen sind, die ich später Fuchssche Funktionen genannt habe; ich war damals sehr unwissend, täglich setzte ich mich an meinen Schreibtisch, verbrachte dort ein oder zwei Stunden

und versuchte eine große Anzahl von Kombinationen, ohne zu einem Resultate zu kommen. Eines Abends trank ich entgegen meiner Gewohnheit schwarzen Kaffee und ich konnte nicht einschlafen: die Gedanken überstürzten sich förmlich; ich fühlte ordentlich, wie sie sich stießen und drängten, bis sich endlich zwei von ihnen aneinander klammerten nnd eine feste Kombination bildeten. Bis zum Morgen hatte ich die Existenz einer Klasse von Fuchsschen Funktionen bewiesen und zwar derjenigen, welche aus der hypergeometrischen Reihe ableitbar sind; ich brauchte nur noch die Resultate zu redigieren, was in einigen Stunden erledigt war.

Sodann versuchte ich, diese Funktionen als Quotienten zweier Reihen darzustellen; diese Idee beruhte auf vollkommen bewußter Überlegung; ich ließ mich durch die Analogie mit den elliptischen Funktionen leiten. Ich stellte mir die Frage, wie diese Reihen beschaffen sein müßten, wenn sie existierten, und ich gelangte ohne Schwierigkeit zu denjenigen Reihen, welche ich später als Fuchssche Theta-Funktionen bezeichnet habe.[13])

In diesem Momente verließ ich Caen, wo ich damals wohnte, um mich an einer von der École des Mines veranstalteten geologischen Exkursion zu beteiligen. Die Wechselfälle der Reise ließen mich meine mathematischen Arbeiten vergessen; nach der Ankunft in Coutances stiegen wir zu irgendeiner gemeinsamen Fahrt in einen Omnibus; als ich den Fuß auf das Trittbrett setzte, kam mir, ohne daß meine Gedanken irgendwie darauf vorbereitet waren, die Idee, daß die Transformationen, welche ich zur Definition der Fuchsschen Funktionen benutzte, mit gewissen Transformationen der nichteuklidischen Geometrie identisch seien. Damals konnte ich das nicht verifizieren, dazu hatte ich keine Zeit, denn kaum hatten wir im Omnibus Platz genommen, so beteiligte ich mich an der allgemeinen Konversation, und doch hatte ich die volle Gewißheit von der Richtigkeit meiner

Idee. Nach Caen zurückgekehrt verifizierte ich das Resultat zur Beruhigung meines Gewissens.

Damals beschäftigte ich mich sodann mit arithmetischen Fragen, ohne bemerkenswerte Resultate zu erlangen und ohne zu ahnen, daß diese Fragen mit meinen früheren Untersuchungen irgendwie im Zusammenhang stehen könnten. Durch meinen Mißerfolg entmutigt, ging ich für einige Tage an die Meeresküste und ich dachte an ganz andere Dinge. Mit derselben charakteristischen Kürze, Plötzlichkeit und unmittelbaren Gewißheit kam mir eines Tages beim Spaziergange über die Klippen der Gedanke, daß die arithmetischen Transformationen der ternären quadratischen Formen identisch seien mit den Bewegungen der nichteuklidischen Geometrie.[14])

Nach Caen zurückgekehrt dachte ich über dieses Resultat weiter nach und verfolgte die sich daraus ergebenden Konsequenzen; das Beispiel der quadratischen Formen zeigte mir, daß es noch andere Fuchssche Gruppen gäbe als diejenigen, welche der hypergeometrischen Reihe entsprechen; ich sah, daß man auf sie die Theorie der Fuchsschen Theta-Reihen anwenden könne, und daß folglich noch andere Fuchssche Funktionen existieren als diejenigen, welche aus der hypergeometrischen Reihe entstehen und welche mir bis dahin allein bekannt waren. Ich nahm mir natürlich vor, alle möglichen Funktionen dieser Art zu bilden; ich begann eine systematische Belagerung und eroberte nacheinander alle Außenwerke; nur eines war scheinbar uneinnehmbar, und der Fall gerade dieses Werkes mußte den Fall der ganzen Festung nach sich ziehen. Alle meine Anstrengungen indessen dienten zunächst nur dazu, mich die zu überwindende Schwierigkeit besser erkennen zu lassen. Und das war immerhin etwas. Bei allen diesen Arbeiten ging ich systematisch vor und war mir der Bedeutung jedes einzelnen Schrittes bewußt.[15])

Darauf mußte ich mich auf dem Mont-Valérien zu einer

oder, wie man sagt: das sublime Ich, spielt eine Hauptrolle bei der mathematischen Erfindung; das geht aus dem Vorstehenden klar hervor. Gewöhnlich denkt man, das sublime Ich könne rein automatisch arbeiten. Wir haben jedoch gesehen, daß die mathematische Arbeit keineswegs in einfach mechanischer Arbeit besteht, daß man sie nicht einer Maschine anvertrauen könnte, wäre letztere auch noch so vollkommen. Es handelt sich nicht nur darum, gegebene Regeln anzuwenden oder möglichst viele Kombinationen nach gewissen festen Gesetzen aufzustellen. Die so erhaltenen Kombinationen wären ungemein zahlreich und zum größten Teile überflüssig und verwirrend. Die eigentliche Arbeit des mathematischen Entdeckers besteht darin, aus diesen Kombinationen eine derartige Auswahl zu treffen, daß er die überflüssigen eliminiert oder vielmehr sich gar nicht die Mühe gibt, dieselben in Betracht zu ziehen. Die Regeln, nach denen eine solche Auswahl getroffen werden muß, sind ungemein fein und subtil, und es ist fast unmöglich, sie in genauer Fassung wiederzugeben: sie lassen sich mehr fühlen als formulieren; kann man nach diesen Darlegungen sich noch ein Sieb vorstellen wollen, das die Fähigkeit hätte, auf rein mechanischem Wege die überflüssigen Kombinationen auszuschalten?

Zur Erklärung wird man sich zunächst die folgende Hypothese bilden: Das sublime Ich steht keineswegs tiefer als das bewußte Ich, es arbeitet nicht rein automatisch, es hat die Fähigkeit zu unterscheiden, es hat Feingefühl; es kann auswählen, es kann ahnen. Es kann sogar besser ahnen als das bewußte Ich, denn es hat dort Erfolg, wo jenes versagt. Steht nun deshalb das sublime Ich über dem bewußten Ich? Man begreift die ganze Wichtigkeit dieser Frage. In einem kürzlich gehaltenen Vortrage hat Boutroux gezeigt, wie diese Frage sich bei ganz anderen Gelegenheiten darbiete und welche Folgerungen eine bejahende Antwort nach sich ziehen würde.*)

*) Vgl. Boutroux, Science et Religion, S. 313 ff.; auch in deutscher Übersetzung: Bd. 10 der Sammlung „Wissenschaft u. Hypothese", 1910.

Müssen wir uns nun auf Grund der vorgetragenen Tatsachen zu einer bejahenden Antwort entschliessen? Ich für mein Teil muß gestehen, daß ich das nur mit Widerstreben tun würde. Prüfen wir deshalb die Tatsachen noch einmal und versuchen wir, ob sie nicht doch eine andere Erklärung zulassen.

Diejenigen Kombinationen, welche nach mehr oder weniger langer unbewusster Arbeit sich unserem Geiste durch eine Art plötzlicher Erleuchtung offenbaren, sind allerdings im allgemeinen nützlich und fruchtbar, sie sind gewissermaßen das Resultat einer ersten Auslosung. Muß man hieraus folgern, das sublime Ich habe mittels einer feinfühligen Intuition geahnt, daß gerade diese Kombinationen nützlich sein könnten, und habe deshalb überhaupt nur diese gebildet, oder hat es nicht vielmehr noch viele andere gebildet, die nicht von Belang waren und die deshalb nicht ins Bewußtsein getreten sind?

Geht man von diesem zweiten Gesichtspunkte aus, so werden alle Kombinationen durch die automatische Tätigkeit des sublimen Ich gebildet, aber nur diejenigen, welche für das gesteckte Ziel von Interesse sind, dringen in das Gebiet des Bewußtseins ein. Das ist immer noch sehr geheimnisvoll. Wie kommt es, daß unter den tausend Produkten unserer unbewußten Tätigkeit einige dazu berufen sind, die Schwelle zu überschreiten, während andere draußen bleiben müssen? Wird ihnen dieses Privilegium einfach durch den Zufall übertragen? Offenbar nicht; von allen Sinnenreizen werden z. B. nur die stärksten unsere Aufmerksamkeit erregen und fesseln, es sei denn, daß diese Aufmerksamkeit durch andere Ursachen auch auf die schwachen gelenkt wird. So gilt allgemein das Folgende: Die bevorzugten unbewußten Erscheinungen, welche befähigt sind ins Bewußtsein zu treten, sind diejenigen, welche unsere Sensibilität direkt oder indirekt am tiefsten beeinflussen.

Mit Verwunderung wird man bemerken, daß hier bei Gelegenheit mathematiseher Beweise, die doch nur von der

Intelligenz abhängig zu sein scheinen, die Sensibilität in Betracht kommen soll. Aber man wird es verstehen, wenn man sich das Gefühl für die mathematische Schönheit vergegenwärtigt, das Gefühl für die Harmonie der Zahlen und Formen, für die geometrische Eleganz. Das ist ein wahrhaft ästhetisches Gefühl, welches allen wirklichen Mathematikern bekannt ist; dabei ist in der Tat Sensibilität im Spiele.

Welchen mathematischen Gebilden legen wir nun diesen Charakter von Schönheit und Eleganz bei, und welche besitzen die Fähigkeit in uns eine Art ästhetischer Befriedigung auszulösen? Offenbar denjenigen, die sich aus harmonischen Elementen zusammensetzen, so daß unser Geist ohne besondere Anstrengung das Ganze erfassen und gleichzeitig in die Einzelheiten eindringen kann. Diese Harmonie bietet unseren ästhetischen Bedürfnissen Befriedigung und ist zugleich eine Hilfe für unseren Geist, den sie unterstützt und leitet. Indem sie vor unseren Augen ein wohlgeordnetes Ganze ausbreitet, läßt sie uns ein mathematisches Gesetz vorausahnen. Die einzigen mathematischen Tatsachen aber, welche würdig sind unsere Aufmerksamkeit zu fesseln und welche vielleicht später von Nutzen sein können, sind, wie wir schon oben gesagt haben, diejenigen, welche uns ein mathematisches Gesetz kennen lehren. Wir kommen somit zu folgendem Schlusse: Die nützlichen Kombinationen sind gerade die schönsten, ich meine diejenigen, welche unsere Sensibilität am besten erregen können, jene besondere Sensibilität, welche allen Mathematikern bekannt ist, von der aber die Laien so wenig wissen, daß sie oft in Versuchung kommen darüber zu lachen.[16])

Was geschieht dann weiter? Von den sehr zahlreichen Kombinationen, die das sublime Ich blindlings gebildet hat, sind fast alle ohne Interesse und ohne Nutzen; aber gerade dadurch sind sie ohne Einwirkung auf die ästhetische Sensibilität geblieben; sie treten niemals in das Bewußtsein;

nur einige von ihnen befriedigen das Bedürfnis nach Harmonie und sind deshalb nützlich und schön zugleich; sie werden fähig jene besondere Sensibilität des Mathematikers zu erregen, von der ich eben gesprochen habe und die unsere Aufmerksamkeit, sobald sie einmal geweckt ist, auf diese harmonischen Kombinationen lenkt und ihnen dadurch Gelegenheit gibt in unser Bewußtsein zu treten.

Das ist nur eine Hypothese, sie wird indessen durch die folgende Beobachtung bekräftigt: wenn der Geist des Mathematikers eine plötzliche Erleuchtung erfährt, so wird er dadurch in der Regel nicht irregeführt; aber, wie ich schon gesagt habe, geschieht es doch manchmal, daß der so eröffnete Weg eine exakte Probe nicht besteht; und in diesem Falle bemerkt man fast immer, daß diese falsche Idee unser natürliches Verlangen nach mathematischer Eleganz geschmeichelt hätte, wenn sie richtig gewesen wäre.

Diese besondere ästhetische Sensibilität spielt demnach die Rolle jenes äußerst feinen Siebes, von dem ich oben gesprochen habe, und dadurch wird es begreiflich, weshalb derjenige, dem diese Sensibilität versagt ist, niemals ein wirklicher Pfadfinder auf dem Gebiete der Mathematik werden kann.

Aber damit sind noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt; das bewußte Ich ist eng begrenzt; über die Grenzen des sublimen Ichs wissen wir nichts, und deshalb können wir ruhig voraussetzen, daß es in kurzer Zeit mehr verschiedene Kombinationen zu bilden vermag, als ein bewußtes Wesen während seines ganzen Lebens zu erfassen vermag. Dennoch existieren auch für das sublime Ich Grenzen, denn es ist doch nicht wahrscheinlich, daß dasselbe alle möglichen Kombinationen bilden könnte, deren Zahl unser Vorstellungsvermögen erschreckt; und doch muß es die Fähigkeit zur Bildung so vieler Kombinationen besitzen, denn, wenn es nur einen kleinen Teil derselben bilden könnte, und wenn es dies auf gut Glück täte, so wäre kaum zu erwarten, daß

die gute Kombination, d. h. diejenige, die man auswählen muß, sich darunter befindet.

Vielleicht muß man die Erklärung dafür in der Periode vorläufiger bewußter Arbeit suchen, welche jeder fruchtbaren unbewußten Arbeit vorangeht. Man gestatte mir hier einen etwas groben Vergleich: stellen wir uns die zukünftigen Elemente unserer Kombinationen etwa derartig vor, wie die hakenförmigen Atome des Epikur. Während vollständiger geistiger Ruhe sind diese Atome unbeweglich, sie haben sich, sozusagen, an einer Wand festgehakt; diese vollständige Ruhe kann beliebig lange dauern, ohne daß diese Atome sich begegnen und ohne daß folglich sich irgendeine Kombination aus denselben bilden könnte.

Anders ist es während einer Periode scheinbarer Ruhe und unbewußter Arbeit; dann lösen sich einige dieser Atome von der Wand los, und setzen sich in Bewegung. Sie durchfurchen den Raum, oder besser gesagt, das Gefäß, in dem sie eingeschlossen sind, nach allen Richtungen hin, etwa wie ein Schwarm von Mücken oder, wenn man einen gelehrteren Vergleich vorzieht, wie die Gasmoleküle in der kinetischen Gastheorie. Ihre gegenseitigen Zusammenstöße können dann neue Kombinationen hervorbringen.

Welche Rolle spielt hierbei die vorhergehende bewußte Arbeit? Sie hat offenbar die Aufgabe, einige dieser Atome zu mobilisieren, sie von der Wand loszuhaken und in Schwung zu bringen. Man vermeint nicht, irgend etwas Ersprießliches vor sich gebracht zu haben, wenn man diese Elemente auf tausenderlei Art durcheinander gerührt und geknetet hat, um eine Verbindung zu erzielen und wenn man trotzdem eine befriedigende Verbindung nicht erreichen konnte. Nachdem aber diese Atome durch unseren Willen derart in Aufregung gebracht wurden, kehren sie nicht in ihren ursprünglichen Ruhezustand zurück; sondern sie setzen ihren Tanz eigenmächtig fort.

Unser Wille hat diese Atome keineswegs auf gut Glück

ausgewählt, sondern verfolgte dabei ein ganz bestimmtes Ziel; die mobilisierten Atome sind also nicht beliebige Atome: es sind vielmehr diejenigen, von denen man vernünftigerweise die gesuchte Lösung erwarten konnte. Neue Kombinationen werden sodann durch Zusammenstöße entstehen, und zwar entweder durch Zusammenstöße der mobilisierten Atome untereinander oder durch Zusammenstöße derselben mit anderen unbeweglich gebliebenen Atomen, denen sie in ihrer Bahn begegnen. Nochmals bitte ich, die grobe Art meines Vergleiches entschuldigen zu wollen, aber ich kann sonst meine Gedanken nicht gut verständlich machen.

Wie dem auch sein möge, jedenfalls können nur diejenigen Kombinationen möglicherweise gebildet werden, bei denen mindestens eines der Elemente und eines der Atome durch unseren Willen frei ausgewählt wurde. Und offenbar befindet sich unter diesen die gute Kombination, von der ich vorhin sprach. Durch derartige Überlegungen gelingt es vielleicht das Paradoxe zu mildern, das unserer ursprünglichen Hypothese anhaftet.

Hier noch eine weitere Bemerkung: Niemals liefert uns die unbewußte Arbeit das Resultat einer längeren Rechnung, bei der man nur feste Regeln anzuwenden hat, ganz fertig. Man könnte glauben, daß das ganz automatisch arbeitende sublime Ich besonders für diese Art von Arbeit geeignet sei, die in gewissem Sinne ausschließlich mechanisch ist. Wenn man des Abends an die Faktoren eines Produktes denkt, so könnte man hoffen, wie es scheint, das Produkt beim Erwachen ganz fertig vorzufinden, oder es könnte eine algebraische Rechnung, z. B. eine Verifikation, unbewußt ausgeführt werden. Das kommt nie vor, wie die Erfahrung lehrt. Alles, was man von den Inspirationen erwarten kann, die als Früchte der unbewußten Arbeit erscheinen, sind neue Ausgangspunkte für derartige Rechnungen; die Rechnungen selbst muß man in der zweiten Periode bewußter Arbeit aus-

führen, d. h. in derjenigen Periode, welche der plötzlichen Eingebung folgt und in der man die Resultate dieser Eingebung verifiziert und ihre Folgerungen zieht. Die Regeln dieser Rechnungen sind genau und kompliziert; sie erheischen Disziplin, Aufmerksamkeit und Willenskraft und folglich auch Bewußtsein. Im sublimen Ich dagegen herrscht, was ich als Freiheit bezeichnen möchte, wenn man dieses Wort für das einfache Fehlen der Disziplin und für die aus dem Zufall entstehende Unordnung anwenden darf. Gerade diese Unordnung gestattet andererseits neue unerwartete Verkettungen.

Es sei mir noch eine letzte Bemerkung gestattet. Als ich weiter oben einige persönliche Erfahrungen schilderte, sprach ich von einer aufgeregten Nacht, in der ich gleichsam gegen meinen Willen arbeitete; derartige Fälle kommen häufig vor, und es ist nicht nötig, daß die außergewöhnliche Tätigkeit des Gehirns durch ein physisches Reizmittel bedingt sei, wie in dem erwähnten Falle. Bei solchen Vorkommnissen assistiert man scheinbar selbst seiner eigenen unbewußten Arbeit, die dem übererregten Bewußtsein teilweise wahrnehmbar wird, deshalb aber doch ihre Natur nicht ändert. Man gibt sich dann undeutlich Rechenschaft von dem, was die beiden Mechanismen oder, wenn man will, die Arbeitsmethoden der beiden Ich unterscheidet. Und die psychologischen Erfahrungen, welche ich machen konnte, scheinen die von mir dargelegten Gesichtspunkte in ihren allgemeinen Zügen zu bestätigen.

Solcher Bestätigung bedürfen sie allerdings, denn trotz allem sind und bleiben sie noch sehr hypothetisch: das Interesse an der Frage ist aber so groß, daß ich es nicht bereue, meine Gedanken dem Leser unterbreitet zu haben.

Viertes Kapitel.
Der Zufall.

I.

„Wie kann man wagen, von den Gesetzen des Zufalls zu sprechen? Ist nicht der Zufall das Gegenteil aller Gesetzmäßigkeit?“ Mit diesen Worten beginnt Bertrand sein Werk Calcul des Probabilités. Die Wahrscheinlichkeit ist der Gewißheit entgegengesetzt; sie betrifft also das, was man nicht weiß und was man folglich auch nicht sollte berechnen können. Hierin liegt ein wenigstens scheinbarer Widerspruch, über den man schon viel geschrieben hat.[17])

Zuerst, was ist Zufall? Die Alten unterschieden die Erscheinungen, welche harmonischen und ein für allemal festgelegten Gesetzen zu genügen schienen, von denjenigen, welche sie dem Zufall zuschrieben; die letzteren konnte man nicht voraussehen, weil sie jedem Gesetze widerstrebten. Auf jedem Gebiete entschieden die genauen Gesetze nicht über alles, sie gaben nur die Grenzen an, innerhalb deren es dem Zufall gestattet war, sich frei zu bewegen. Bei dieser Vorstellung hatte das Wort „Zufall“ eine bestimmte objektive Bedeutung: Was Zufall für den einen war, war auch Zufall für den andern und selbst für die Götter.

Diese Vorstellung ist aber nicht mehr die unsere; wir sind absolute Deterministen geworden, und selbst wer das Recht des freien Willens dem Menschen gewahrt wissen will, läßt den Determinismus wenigstens in der unorganischen Welt unbeschränkt herrschen. Jede Erscheinung, und sei sie noch so unbedeutend, hat ihre Ursachen, und ein unendlich umfassender Geist, der über die Gesetze der Natur unendlich genau unterrichtet ist, hätte sie seit Anfang der Welt voraussehen können. Wenn ein solcher Geist existierte, könnte man sich mit ihm nicht auf ein Glücksspiel einlassen, man würde immer verlieren.

Für ein solches Wesen hätte das Wort Zufall keine Bedeutung, oder vielmehr, es gäbe für dasselbe keinen Zufall. Nur wegen unserer Unvollkommenheit und unserer Unwissenheit würde es also für uns einen Zufall geben. Und selbst für uns schwache Menschen wären noch Unterschiede zu machen: was für den Unwissenden Zufall ist, wäre für den Wissenden kein Zufall. Der Zufall erschiene somit als das Maß unserer Unwissenheit. Die zufälligen Erscheinungen wären ihrer Definition nach diejenigen, deren Gesetze wir nicht kennen.

Ist nun diese Definition befriedigend? Als die chaldäischen Hirten zuerst die Bewegungen der Sterne mit den Augen verfolgten, kannten sie noch nicht die Gesetze der Astronomie; dürfen wir annehmen, sie hätten deshalb gesagt, daß die Bewegungen der Gestirne dem Zufalle unterworfen seien? Wenn ein moderner Physiker eine neue Erscheinung studiert und am Dienstag das Gesetz derselben entdeckt, sollte er deswegen am Montag gesagt haben, daß die Erscheinung nur zufällig sei? Ja, noch mehr: beruft man sich nicht oft, um eine Erscheinung vorauszusagen, auf das, was Bertrand die Gesetze des Zufalls nennt? In der kinetischen Gastheorie z. B. leitet man die bekannten Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac auf Grund der Hypothese ab, daß die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle unregelmäßig variieren, d. h. nur vom Zufall abhängen. Alle Physiker werden behaupten, daß die zu beobachtenden Gesetze viel einfacher sein würden, wenn die Geschwindigkeiten sich nach irgendeinem einfachen Elementargesetze bestimmten, wenn die Moleküle sozusagen organisiert wären, wenn sie irgendwie diszipliniert wären. Nur dank dem herrschenden Zufall, dank unserer Unwissenheit können wir hier Schlüsse ziehen; wenn demnach das Wort Zufall einfach gleichbedeutend mit Unwissenheit ist — was sollen wir uns dabei denken? Dürfen wir das etwa in folgender Weise formulieren?

„Man verlangt von uns, die künftigen Erscheinungen vorauszusagen. Wenn ich unglücklicherweise die Gesetze dieser Erscheinungen kennen würde, so könnte ich dem Verlangen nur durch unentwirrbare Rechnungen nachkommen und ich müßte schließlich ganz darauf verzichten; da ich aber das Glück habe die Gesetze nicht zu kennen, so kann ich sofort die Antwort geben. Das Allermerkwürdigste ist hierbei, daß meine Antwort richtig ausfällt."

Dann aber muß der Zufall doch etwas anderes sein als ein Name für unsere Unwissenheit, dann müssen wir die Erscheinungen, deren Ursachen wir nicht kennen, in verschiedene Klassen einteilen; wir müssen die zufälligen Erscheinungen, über welche uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorläufig unterrichtet, unterscheiden von denjenigen, die nicht zufällig sind, und über die wir nichts aussagen können, ehe wir nicht die für sie geltenden Gesetze bestimmt haben. Die Aufklärungen, welche uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung über die wirklich zufälligen Erscheinungen gibt, hören selbstverständlich nicht auf, richtig zu sein, wenn wir einmal das Wesen dieser Erscheinungen besser erkennen.

Der Direktor einer Lebensversicherungsgesellschaft weiß nicht, wann jeder einzelne seiner Versicherten sterben wird, aber er verläßt sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung und auf das Gesetz der großen Zahlen; und dabei irrt er sich nicht, denn er verteilt ja Dividenden an seine Aktionäre. Wenn ein sehr scharfblickender und sehr indiskreter Arzt nach Abschluß der Versicherungen den Direktor über die Lebenswahrscheinlichkeit der Versicherten genau unterrichtet, so hören deshalb die Dividenden nicht auf. Dieser Arzt würde zwar der Unwissenheit des Direktors ein Ende machen, aber er würde keinen Einfluß auf die Dividenden haben, die offenbar nicht von dieser Unwissenheit abhängig sind.[18])

II.

Um eine bessere Definition des Zufalls zu finden, müssen wir einige Tatsachen prüfen, die man gewöhnlich als zufällig betrachtet und auf die die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar zu sein scheint; wir werden sodann die Frage nach ihren gemeinsamen Charakteren zu beantworten suchen.

Als erstes Beispiel wählen wir dasjenige des unstabilen Gleichgewichts; wenn ein Kegel auf seine Spitze gestellt wird, so wissen wir, daß er umfallen muß, aber wir wissen nicht, nach welcher Seite; es scheint uns, als ob der Zufall darüber allein entscheidet. Wenn der Kegel vollkommen symmetrisch wäre, wenn seine Achse vollkommen vertikal stände, wenn keine andere Kraft als die Schwerkraft auf ihn wirkte, so würde er durchaus nicht fallen. Aber der geringste Symmetriefehler läßt ihn sich leicht nach einer bestimmten Seite neigen, und wenn diese Neigung auch noch so klein ist, wird der Kegel doch nach dieser Seite fallen. Selbst bei vollkommener Symmetrie würde eine leichte Erschütterung oder ein Luftzug ihm eine Neigung um einige Bogensekunden erteilen, und das wäre genug, um seinen Fall und selbst die Richtung seines Falles zu bestimmen; diese Richtung fällt dann immer mit der Richtung seiner Anfangsneigung zusammen.

Eine sehr kleine Ursache, die für uns unbemerkbar bleibt, bewirkt einen beträchtlichen Effekt, den wir unbedingt bemerken müssen, und dann sagen wir, daß dieser Effekt vom Zufall abhänge. Würden wir die Gesetze der Natur und den Zustand des Universums für einen gewissen Zeitpunkt genau kennen, so könnten wir den Zustand dieses Universums für irgendeinen späteren Zeitpunkt genau voraussagen. Aber selbst wenn die Naturgesetze für uns kein Geheimnis mehr enthielten, können wir doch den Anfangszustand immer nur näherungsweise kennen. Wenn wir dadurch in den Stand gesetzt werden, den späteren Zustand mit dem-

selben Näherungsgrade vorauszusagen, so ist das alles, was man verlangen kann; wir sagen dann: die Erscheinung wurde vorausgesagt, sie wird durch Gesetze bestimmt. Aber so ist es nicht immer; es kann der Fall eintreten, daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen; ein kleiner Irrtum in den ersteren kann einen außerordentlich großen Irrtum für die letzteren nach sich ziehen. Die Vorhersage wird unmöglich und wir haben eine „zufällige Erscheinung“.

Unser zweites Beispiel ist dem ersten sehr ähnlich, wir entnehmen es der Meteorologie. Weshalb bereitet es den Meteorologen so viele Schwierigkeiten, das Wetter mit einiger Sicherheit vorauszusagen? Weshalb scheint uns das Eintreten von Regengüssen und Stürmen gänzlich vom Zufall abzuhängen, so daß manche Leute es für ganz natürlich halten, um Regen und gutes Wetter zu beten, während doch dieselben Leute es lächerlich finden würden, wenn man eine Sonnenfinsternis durch Gebet herbeiführen wollte? Wir wissen, daß die großen Störungen meistens in denjenigen Gebieten der Atmosphäre entstehen, in denen dieselbe sich in unstabilem Gleichgewichte befindet. Die Meteorologen erkennen wohl, daß das Gleichgewicht unstabil ist und daß irgendwo ein Zyklon entstehen wird; aber wo, das können sie nicht angeben; ein Zehntelgrad mehr oder weniger an irgendeiner Stelle, und der Zyklon bricht nicht hier, sondern dort aus, und seine Verwüstungen treffen Gegenden, die sonst verschont geblieben wären. Wenn man diesen Zehntelgrad gekannt hätte, so wäre das Eintreffen des Sturmes vorauszusehen gewesen, aber die Beobachtungen waren weder hinreichend dicht, noch hinreichend genau, und deshalb macht es den Eindruck, als sei alles dem Zufall überlassen. Auch hier finden wir wieder denselben Gegensatz zwischen einer sehr kleinen Ursache, die für den Beobachter nicht wahrnehmbar ist, und sehr beträchtlichen Folgeerscheinungen, die manchmal furchtbares Unheil anrichten.

Betrachten wir noch ein anderes Beispiel: die Verteilung der kleinen Planeten über den Tierkreis.[19]) Ihre anfänglichen Längen mögen beliebig gewesen sein; ihre mittleren Bewegungen waren verschieden, und sie beschreiben ihre Bahnen seit so langer Zeit, daß man gegenwärtig sagen kann, ihre Verteilung über den Tierkreis sei ganz zufällig. Kleine anfängliche Differenzen zwischen ihren Entfernungen von der Sonne oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwischen ihren mittleren Bewegungen, haben schließlich sehr große Differenzen zwischen ihren gegenwärtigen Längen zur Folge gehabt; ein Überschuß von einem Tausendstel von einer Sekunde in ihrer täglichen mittleren Bewegung gibt eine volle Sekunde in drei Jahren, einen Grad in zehntausend Jahren, einen vollen Umlauf in drei oder vier Millionen Jahren, und was will dies gegenüber der Zeit bedeuten, die verflossen ist, seitdem sich die kleinen Planeten aus dem Urnebel von Laplace abgesondert haben? Auch hier haben wir wieder eine kleine Ursache und eine große Wirkung; oder besser, kleine Differenzen in der Ursache und große Differenzen in der Wirkung.

Das Roulettespiel entfernt uns weniger als man zuerst denkt von dem vorhergehenden Beispiel.[20]) Stellen wir uns eine Nadel vor, die man in drehende Bewegung um einen festen Stützpunkt versetzen kann, und darunter eine Art Zifferblatt, das in hundert abwechselnd rote und schwarze Abschnitte geteilt ist. Wenn die Nadel über einem roten Abschnitte stehen bleibt, so ist das Spiel gewonnen, andernfalls ist es verloren. Alles hängt offenbar von dem ursprünglichen Antriebe ab, den wir der Nadel erteilen. Die letztere wird sich etwa zehn- oder zwanzigmal ganz herumdrehen und dann mehr oder weniger schnell zum Stillstand kommen, je nachdem ich sie mehr oder weniger stark gestoßen habe. Wenn der Antrieb nur um ein Tausendstel oder um ein Zehntausendstel variiert, so genügt das, um zu bewirken, daß die Nadel nicht etwa über einem schwarzen Teile, son-

dern über dem darauffolgenden roten Teile stillsteht. Das sind Differenzen, die unser Muskelsinn nicht wahrnehmen kann und die selbst den feinsten Instrumenten entgehen würden. Es ist mir deshalb unmöglich, vorauszusehen, was die von mir in Bewegung gesetzte Nadel tun wird, und deshalb befinde ich mich in gespanntester Erwartung und hoffe alles vom Zufall. Die Differenz in der Ursache ist nicht wahrnehmbar und die Differenz in der Wirkung ist für mich von der größesten Wichtigkeit, denn es handelt sich um meinen ganzen Einsatz.

III.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich eine Bemerkung einschalten, die mit unseren gegenwärtigen Betrachtungen nur lose zusammenhängt. Vor einigen Jahren hat ein Philosoph behauptet, daß die Zukunft durch die Vergangenheit bestimmt sei, aber nicht die Vergangenheit durch die Zukunft, oder mit anderen Worten, daß wir aus der Kenntnis der Gegenwart die Kenntnis der Zukunft, aber nicht diejenige der Vergangenheit ableiten können; denn, so sagt er, eine Ursache kann nur eine Wirkung hervorbringen, während dieselbe Wirkung durch mehrere verschiedene Ursachen hervorgebracht werden kann. Dieser Schlußfolgerung kann offenbar kein Forscher beistimmen; die Naturgesetze verknüpfen das Vergangene mit dem Künftigen derartig, daß die Vergangenheit durch die Zukunft ebenso bestimmt ist, wie die Zukunft durch die Vergangenheit. Wie aber ist der Irrtum jenes Philosophen zu erklären? Wir wissen, daß infolge des Carnotschen Prinzips die physikalischen Erscheinungen nicht umkehrbar sind und daß die Welt einem überall gleichförmigen Zustande entgegenstrebt. Von zwei verschieden erwärmten Körpern gibt der wärmere Wärme an den kälteren ab; wir können demnach voraussehen, daß ihre Temperaturen sich ausgleichen werden. Sind sie jedoch einmal einander gleich geworden und befragt man uns dann über den früheren Zustand der beiden Körper, was können

wir dann antworten? Wir werden zwar sagen, daß der eine von ihnen warm und der andere kalt war, wir werden aber nicht erraten können, welcher von beiden der wärmere gewesen ist.[21])

In Wirklichkeit jedoch werden die Temperaturen beider niemals genau gleich. Die Differenz ihrer Temperaturen nähert sich nur asymptotisch dem Werte Null; in einem gewissen Momente werden folglich unsere Thermometer nicht mehr imstande sein diese Differenz zu messen. Hätten wir dagegen tausend- und hunderttausendmal empfindlichere Thermometer, so würden wir erkennen, daß immer noch eine kleine Differenz besteht und daß der eine der beiden Körper ein wenig wärmer geblieben ist als der andere; und dann könnten wir feststellen, daß dieser in früheren Zeiten viel wärmer gewesen sein muß als der andere.

Im Gegensatze zu den früheren Beispielen haben wir hier also große Differenzen in der Ursache und kleine Differenzen in der Wirkung. Flammarion hat in seinen Schriften gelegentlich einen Beobachter eingeführt, der sich mit einer Geschwindigkeit, größer als die Lichtgeschwindigkeit, von der Erde entfernt; für einen solchen hätte die Zeit ihr Vorzeichen geändert. Die Geschichte würde ihm in umgekehrter Ordnung erscheinen, und Waterloo würde Austerlitz vorangehen. Für diesen Beobachter wären Wirkungen und Ursachen miteinander vertauscht; das unstabile Gleichgewicht wäre nicht mehr ein Ausnahmefall; infolge der allgemeinen Nichtumkehrbarkeit der Erscheinungen würde für ihn scheinbar alles aus einer Art Chaos hervorgehen, das sich in unstabilem Gleichgewichte befindet; er würde den Eindruck haben, als ob die ganze Natur der Herrschaft des Zufalls überlassen sei.

IV.

Die folgenden Beispiele sind wieder von etwas anderem Charakter. Betrachten wir zunächst die kinetische Gastheorie. Wie müssen wir uns ein mit Gas angefülltes Gefäß

vorstellen? Unzählige Moleküle durchfliegen dieses Gefäß mit großer Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin; in jedem Momente stoßen sie gegen die Gefäßwände oder stoßen sie gegenseitig zusammen; und diese Zusammenstöße finden unter den verschiedensten Bedingungen statt. Was uns hier vor allem auffällt, ist nicht die Kleinheit der Ursache, sondern ihre verwickelte Natur. Dennoch kommt auch jener erste Umstand hier mit in Betracht und spielt eine wichtige Rolle. Wäre ein Molekül von seiner Bahn um eine sehr kleine, dem Wirkungsradius der Gasmoleküle vergleichbare Größe nach links oder nach rechts abgewichen, so hätte es einen Zusammenstoß vermieden, oder derselbe hätte unter anderen Bedingungen stattgefunden und dadurch hätte die Richtung der Geschwindigkeit nach dem Zusammenstoße eine Änderung von vielleicht neunzig oder hundertachtzig Graden erfahren.

Das ist nicht alles; wie wir soeben gesehen haben, genügt es, das Molekül vor dem Zusammenstoße um eine unendlich kleine Größe abzulenken, damit sich eine Ablenkung von endlicher Größe nach dem Zusammenstoße ergebe. Wenn das Molekül zwei aufeinander folgende Zusammenstöße erfährt, so wird vor dem ersten Zusammenstoße eine Ablenkung, deren Größe unendlich klein zweiter Ordnung ist, genügen, damit nach dem ersten Zusammenstoße die Ablenkung durch eine unendlich kleine Größe erster Ordnung und nach dem zweiten Zusammenstoße durch eine endliche Größe dargestellt werde. Tatsächlich erfährt das Molekül nicht nur zwei Zusammenstöße, sondern in jeder Sekunde deren eine außerordentlich große Anzahl. Wenn also die Ablenkung infolge des ersten Zusammenstoßes mit einer sehr großen Zahl A multipliziert werden muß, so ist sie nach n Zusammenstößen mit A^n zu multiplizieren; sie wird also sehr groß, nicht nur deshalb, weil A sehr groß ist, d. h. weil kleine Ursachen große Wirkungen hervorbringen, sondern auch deshalb, weil der Exponent n sehr groß ist,

d. h. weil die Zusammenstöße sehr zahlreich und die Ursachen sehr verwickelt sind.

Betrachten wir ein zweites Beispiel dieser Art; weshalb scheinen uns die Tropfen in einem Regengusse ganz zufällig verteilt zu sein? Der Grund liegt wieder in der verwickelten Natur der Ursachen, welche die Bildung der Tropfen bedingen. In der Atmosphäre befinden sich zahlreiche Ionen, während langer Zeit sind sie beständig wechselnden Luftströmungen ausgesetzt gewesen, durch kleine Wirbelwinde werden sie umhergetrieben und schließlich steht ihre Verteilung in der Atmosphäre in keiner Beziehung mehr zu ihrer ursprünglichen Verteilung. Plötzlich fällt die Temperatur, der Wasserdampf kondensiert sich und jedes Ion wird das Zentrum eines Regentropfens. Um zu erkennen, wie diese Tropfen verteilt sind und wieviele auf eine Fläche von gegebener Größe fallen werden, genügt es nicht, daß man die ursprüngliche Lage der Ionen kennt, man muß auch die Wirkung von tausend kleinsten und unberechenbaren Luftströmungen berücksichtigen.

Im wesentlichen ist dieselbe Betrachtung anwendbar auf Staubkörnchen, die im Wasser suspendiert sind; im Gefäße finden Strömungen statt, deren Gesetze wir nicht kennen; wir wissen nur, daß diese sehr kompliziert sind; nach einer gewissen Zeit sind die Körnchen zufällig, d. h. gleichförmig in dem Gefäße verteilt und zwar gerade infolge der Kompliziertheit der Strömungen. Wenn letztere irgendeinem einfachen Gesetze gehorchen würden, wenn z. B. das Gefäß die Gestalt eines Rotationskörpers hätte und wenn die Strömungen dann kreisförmig um die Achse verliefen, so würde die Wirkung eine andere sein, denn dann behielte jedes Körnchen seine anfängliche Höhe über dem Boden bei und ebenso seine anfängliche Entfernung von der Achse.

Zu demselben Resultate gelangt man durch Betrachtung einer Mischung von zwei Flüssigkeiten oder von zwei feinkörnigen Pulvern. Um endlich noch ein gröberes Beispiel

zu erwähnen, sei auf die Mischung eines Kartenspiels hingewiesen, für welche die gleiche Betrachtung gültig bleibt. Bei jedem Kartenschlag erleiden die Karten eine Vertauschung (analog derjenigen, die man in der Theorie der Substitutionen studiert). Welche Vertauschung wird nun die endgültig bleibende sein? Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies eine bestimmte sei (z. B. diejenige, welche an den n-ten Platz diejenige Karte bringt, welche vor der Vertauschung den Platz $\varphi(n)$ innehatte), diese Wahrscheinlichkeit, sage ich, hängt von den Gewohnheiten des Spielers ab. Der Spieler mischt die Karten eine gewisse Zeit lang, es wird also sukzessive eine große Anzahl von Vertauschungen ausgeführt und die daraus resultierende Anordnung hängt nur noch vom Zufall ab; damit will ich sagen, daß schließlich alle möglichen Anordnungen gleich wahrscheinlich sind. Dieses Resultat ist hier eine Folge der großen Zahl von sukzessiven Vertauschungen, d. h. eine Folge der verwickelten Natur der Erscheinung.

Endlich noch ein Wort über die Fehler-Theorie.[22]) Auch hier kommt es darauf an, daß die Ursachen verwickelt und zahlreich sind. Wie vielen Fehlerquellen ist ein Beobachter selbst bei Benutzung der besten Instrumente ausgesetzt! Er muß sich bemühen, die gröbsten Fehler zu bemerken und zu vermeiden. Das sind diejenigen, die zu den sogenannten systematischen Fehlern Veranlassung geben. Wenn man nun diese eliminiert hat, oder wenigstens annimmt, daß dies gelungen sei, so bleiben noch viele kleine Fehler, deren Wirkungen sich addieren können und die dadurch gefährlich werden. Daraus entstehen die sogenannten zufälligen Fehler; wir schreiben sie dem Zufalle zu, weil ihre Ursachen zu verwickelt und zu zahlreich sind. Auch hier haben wir kleine Ursachen, aber jede von ihnen bringt auch nur eine kleine Wirkung hervor und erst durch ihre Vereinigung und ihre große Anzahl werden diese Wirkungen dem Beobachter gefährlich.

V.

Man kann diese Verhältnisse noch von einem dritten Gesichtspunkte aus betrachten; derselbe ist von geringerer Wichtigkeit, und ich werde ihn nicht so ausführlich darlegen. Wenn man eine Tatsache voraussagen will und deshalb die vorhergehenden Tatsachen prüft, so sucht man sich über die frühere Gesamtlage zu unterrichten, dies läßt sich jedoch nie für alle Teile des Universums durchführen; man begnügt sich damit zu erfahren, was in der Nachbarschaft derjenigen Stelle vorgeht, wo die betreffende Tatsache zu erwarten ist, oder was sonst irgendeine Beziehung zu dieser Tatsache zu haben scheint. Eine solche Untersuchung kann nie vollständig sein, man muß eben zu wählen wissen. Es kann auch vorkommen, daß wir Umstände unbeachtet lassen, die anfangs der vorauszusagenden Tatsache vollständig fremd zu sein schienen und deren Einfluß auf dieselben man nicht für wesentlich hielt, die aber dennoch, gegen jede Erwartung, schließlich eine wichtige Rolle spielen.

Ein Mann geht seinen Geschäften nach; sein Weg führt durch eine Straße; jemand, der mit der Art seiner Geschäfte vertraut wäre, könnte angeben, weshalb er gerade zu dieser Stunde ausgeht und weshalb er diese Straße passiert. Auf einem Dache arbeitet ein Dachdecker; der Unternehmer, in dessen Diensten er steht, könnte wenigstens ungefähr voraussagen, was der Arbeiter tun wird. Unser Mann indessen denkt nicht an den Dachdecker, und der Dachdecker denkt nicht an den Mann: sie gehören scheinbar zwei einander ganz fremden Welten an. Nun läßt der Dachdecker aber einen Dachziegel fallen, der den Mann tötet, und jeder wird sofort sagen, daß dies ein Zufall sei.

Unser Unvermögen gestattet uns nicht, das ganze Universum zu umfassen, und nötigt uns, es in einzelne Abschnitte zu zerlegen. Wir bemühen uns, dies möglichst sachlich und natürlich auszuführen; trotzdem kommt es hin und wieder vor, daß zwei dieser Abschnitte einander beeinflussen. Von

den Wirkungen dieser wechselseitigen Beeinflussung sagen wir dann, sie seien dem Zufall zuzuschreiben.

Ist dies nun wirklich ein dritter Gesichtspunkt für das Begreifen des Zufalls? Nicht immer; in der Tat kann man meistens diese Betrachtung auf unseren ersten oder zweiten Fall zurückführen. Jedesmal wenn zwei einander sonst fremde Welten aufeinander Einfluß gewinnen, können die Gesetze dieser Einwirkung nur sehr verwickelt sein, und andererseits hätte eine sehr geringe Änderung in den Anfangsbedingungen der beiden Welten genügt, um ihre gegenseitige Einwirkung auszuschliessen. Wie wenig hätten die Umstände geändert zu werden brauchen, um zu veranlassen, daß unser Mann eine Sekunde später die Straße passierte, oder daß der Arbeiter seinen Dachziegel eine Sekunde früher fallen ließ!

VI.

Alles, was wir bisher gesagt haben, erklärt uns noch nicht, weshalb der Zufall gewissen Gesetzen gehorcht. Genügt es, daß die Ursachen klein sind, oder daß sie verwickelt sind, damit wir voraussagen können, welche Wirkungen im Mittel (wenn auch nicht in jedem einzelnen Falle) eintreten werden? Um diese Frage zu beantworten, ist es am besten, einige der erwähnten Beispiele nochmals durchzugehen.

Ich beginne mit dem Beispiele des Roulettes. Wie ich oben sagte, hängt der Punkt, wo die Nadel stillsteht, von dem ihr zu Anfang erteilten Antriebe ab. Welches ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Impuls einen bestimmten Wert habe? Darüber weiß ich nichts, aber es liegt nahe vorauszusetzen, daß diese Wahrscheinlichkeit durch eine stetige analytische Funktion dargestellt wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert des Impulses zwischen a und $a + \varepsilon$ liegt, ist demnach wesentlich gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Wert zwischen $a + \varepsilon$ und $a + 2\varepsilon$ enthalten sei, vorausgesetzt, daß ε sehr klein ist. Diese Eigenschaft ist allen „analytischen“ Funktionen ge-

meinsam. Die kleinen Änderungen einer solchen Funktion sind stets den kleinen Änderungen der Variabeln proportional.

Nach unseren obigen Voraussetzungen genügt eine sehr kleine Änderung des Impulses, um die Farbe des Abschnittes zu ändern, über welchem die Nadel zum Stillstande kommt. Von a bis $a+\varepsilon$ ist dies etwa Rot, von $a+\varepsilon$ bis $a+2\varepsilon$ dagegen Schwarz; die Wahrscheinlichkeit für einen roten Abschnitt ist daher dieselbe wie für den darauffolgenden schwarzen Abschnitt, und folglich ist die Gesamtwahrscheinlichkeit für Rot gleich der Gesamtwahrscheinlichkeit für Schwarz.

Durch die Natur des Problems ist hier die analytische Funktion gegeben, welche die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten anfänglichen Impuls darstellt. Das Resultat aber bleibt richtig, wie auch diese Funktion beschaffen sei, denn es hängt nur von einer, allen analytischen Funktionen gemeinsamen Eigenschaft ab. Es folgt daraus, daß wir schließlich die ursprünglich als gegeben gedachte Funktion nicht weiter nötig haben.

Was wir hier über das Roulette gesagt haben, läßt sich auch auf das Beispiel der kleinen Planeten anwenden. Der Tierkreis kann als ein ungeheuer großes Roulette betrachtet werden, auf welches der Schöpfer eine sehr große Anzahl kleiner Kugeln geworfen hat; ihnen allen hat er verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten d. h. verschiedene anfängliche Impulse erteilt, und letztere variieren nach irgendeinem uns nicht weiter bekannten Gesetze. Ihre gegenwärtige Verteilung ist gleichförmig und aus demselben Grunde wie im vorhergehenden Falle von diesem Gesetze unabhängig. Man erkennt somit, weshalb die Erscheinungen den Gesetzen des Zufalls gehorchen, indem kleine Differenzen in den Ursachen genügen, um große Differenzen in den Wirkungen hervorzubringen. Die Wahrscheinlichkeiten für diese kleinen Differenzen können dann als proportional zu diesen Differenzen selbst betrachtet werden, und zwar eben deshalb, weil diese Differenzen klein sind, und weil die kleinen Änderungen

einer stetigen Funktion den entsprechenden Änderungen der Variabeln proportional sind.

Wir gehen zu einem gänzlich verschiedenen Beispiele über, bei dem es hauptsächlich auf die verwickelte Natur der Ursachen ankommt; ich nehme an: ein Spieler mischt ein Kartenspiel. Bei jedem Schlage ändert er die Anordnung der Karten, und er kann sie auf verschiedene Weisen ändern. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir nur drei Karten voraussetzen. Die Karten, welche vor dem ersten Schlage bzw. die Plätze 1 2 3 einnahmen, werden nach dem ersten Schlage in einer der folgenden Anordnungen erscheinen können:

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, 1 3 2, 2 1 3.

Eine jede dieser sechs Annahmen ist möglich, und es mögen ihnen bzw. die folgenden Wahrscheinlichkeiten zukommen:

$$p_1, \; p_2, \; p_3, \; p_4, \; p_5, \; p_6.$$

Die Summe dieser sechs Zahlen ist gleich 1 (denn die Wahrscheinlichkeit 1 bedeutet die Gewißheit); das ist alles, was wir wissen; diese sechs Wahrscheinlichkeiten hängen natürlich von den Gewohnheiten des Spielers ab, die wir nicht weiter kennen.

Beim zweiten Schlage und ebenso bei dem folgenden wiederholt sich dies unter den gleichen Bedingungen; ich meine damit, daß z. B. p_4 immer die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß die drei Karten, denen zwischen dem n^{ten} und $(n+1)^{\text{ten}}$ Schlage die Anordnung 1 2 3 zukam, nach dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Schlage die Anordnung 3 2 1 aufweisen. Das bleibt richtig, was auch die Zahl n sei, denn die Gewohnheiten des Spielers und seine Art und Weise zu mischen bleiben unverändert.

Wenn nun die Anzahl der Schläge beim Mischen sehr groß wird, so können die Karten, die vor dem ersten Schlage in der Ordnung 1 2 3 lagen, nach dem letzten Schlage irgendeine der Anordnungen

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, 1 3 2, 2 1 3

aufweisen, und die Wahrscheinlichkeit für jede dieser sechs Möglichkeiten wird jetzt wesentlich dieselbe, und zwar gleich $1/6$ sein; und das bleibt richtig, welche Werte auch die obigen Zahlen $p_1, \ldots, p_6$ haben mögen, die uns übrigens unbekannt sind. Die große Anzahl der Schläge, d. h. die verwickelte Natur der Ursachen, hat hier die Gleichförmigkeit hervorgebracht.

Dieselbe Überlegung bleibt unverändert gültig, wenn es sich um mehr als drei Karten handelt, aber selbst mit drei Karten wird der Beweis verwickelt; ich begnüge mich daher den Beweis nur für zwei Karten zu geben. Wir haben jetzt nur zwei mögliche Anordnungen:

1 2, 2 1

mit den Wahrscheinlichkeiten p_1 und $p_2 = 1 - p_1$. Es mögen n Schläge stattgefunden haben, und wir wollen annehmen, daß ich einen Frank gewinne, wenn die Karten schließlich in der ursprünglichen Ordnung liegen, daß ich aber einen Frank verliere, wenn sie schließlich vertauscht sind. Meine mathematische Hoffnung ist dann gleich[23])

$$(p_1 - p_2)^n.$$

Die Differenz $p_1 - p_2$ ist sicher kleiner als 1; wenn n also sehr groß wird, so wird meine Hoffnung gleich Null; wir haben nicht nötig p_1 und p_2 zu kennen, um doch zu wissen, daß das Spiel gleiche Chancen bietet.

Immerhin ist eine Ausnahme möglich, nämlich wenn eine der Zahlen p_1 und p_2 gleich 1 und die andere gleich Null ist. Dann wird unsere Überlegung ungültig, weil unsere anfänglichen Voraussetzungen zu einfach sein würden.

Was wir hier gesehen haben, läßt sich nicht nur auf das Mischen von Karten anwenden, sondern auf alle Mischungen, z. B. auf solche von Pulvern oder Flüssigkeiten, und selbst auf Mischungen von Gasmolekülen in der kinetischen Gas-

theorie. Um auf letztere zurückzukommen, wollen wir uns für den Augenblick ein Gas vorstellen, dessen Moleküle nicht gegenseitig zusammenstoßen können, aber wohl durch Stöße gegen die Wände des Gefäßes, in welchem das Gas eingeschlossen ist, von ihren Bahnen abgelenkt werden können. Wenn die Gestalt dieses Gefäßes hinreichend kompliziert ist, so wird die Verteilung der Moleküle und diejenige ihrer Geschwindigkeiten bald gleichförmig werden. Das gilt aber nicht mehr, wenn daß Gefäß kugelförmig ist oder wenn es die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons hat; weshalb? Im ersten Falle, weil die Entfernung irgendeiner Molekülbahn vom Zentrum der Kugel stets konstant bleibt; im andern Falle, weil der absolute Wert des Winkels jeder Bahnlinie gegen die Seitenflächen des Parallelepipedons konstant bleibt.

Man ersieht hieraus, was unter zu einfachen Bedingungen verstanden werden soll; es sind das solche Bedingungen, die irgend etwas unverändert lassen, bei denen, wie man sagt, eine Invariante existiert. Die Differentialgleichungen des Problems sind dann zu einfach, als daß man die Gesetze des Zufalls anwenden könnte. Auf den ersten Blick scheint diese Aussage keinen Sinn zu haben; jetzt wissen wir jedoch, was sie bedeuten soll. Die Differentialgleichungen sind zu einfach, wenn sie ein eindeutiges Integral zulassen und irgend etwas konstant lassen; sobald irgend etwas in den Anfangsbedingungen unverändert bleibt, kann offenbar der Endzustand nicht mehr vom Anfangszustande unabhängig sein.

Endlich kommen wir zur Theorie der Fehler. Wodurch die zufälligen Fehler entstehen, wissen wir nicht, und eben weil wir es nicht wissen, sind wir sicher, daß diese Fehler dem Gaußschen Gesetze genügen. Das ist offenbar ein Paradoxon. Es erklärt sich ungefähr auf dieselbe Weise wie in den früheren Fällen. Wir brauchen nur folgendes zu wissen: daß die Fehler sehr zahlreich sind, daß sie sehr

klein sind, daß jeder von ihnen ebensogut positiv als negativ sein kann. Welches aber die Wahrscheinlichkeitskurve für jeden einzelnen Fehler ist, davon wissen wir nichts, wir setzen nur voraus, daß diese Kurve symmetrisch ist. Auf Grund dieser Annahmen beweist man, daß der resultierende Fehler dem Gaußschen Gesetze genügt, und dieses Gesetz besteht unabhängig von den besonderen Gesetzen, die wir nicht kennen. Auch hier ist die Einfachheit des Resultates eine Folge der verwickelten Natur der gegebenen Umstände.

VII.

Es ergeben sich noch mehr paradoxe Resultate. Nach dem Vorgange Flammarions habe ich soeben von dem Manne gesprochen, der sich schneller als das Licht bewegt, und für den die Zeit das Vorzeichen umkehrt. Ich sagte, daß für ihn alle Erscheinungen nur vom Zufall abhängen würden. Unter einem gewissen Gesichtspunkte ist das richtig, in einem gegebenen Momente jedoch würden alle diese Erscheinungen nicht gemäß den Gesetzen des Zufalles verteilt sein, denn sie sind ja tatsächlich so verteilt, wir wir sie sehen, und wir sehen sie sich durchaus harmonisch abwickeln, ohne daß sie aus einem ursprünglichen Chaos hervorzugehen scheinen, und für uns sind sie nicht durch den Zufall regiert.

Was können wir hieraus schließen? Für Lumen (so nennt Flammarion seinen Mann) scheinen kleine Ursachen große Wirkungen hervorzubringen; weshalb soll nun für ihn nicht dasselbe gelten, als für uns, wenn bei uns große Wirkungen aus kleinen Ursachen entstehen? Wäre nicht dieselbe Schlußweise auch auf diesen Fall anwendbar?

Wiederholen wir diese Schlußweise: wenn kleine Differenzen in den Ursachen große Differenzen in den Wirkungen erzeugen, weshalb sind dann die letzteren nach den Gesetzen des Zufalls verteilt? Ich will annehmen, daß eine Differenz von einem Millimeter in der Ursache eine Diffe-

renz von einem Kilometer in der Wirkung erzeugt. In dem Falle ferner, wo die Wirkung sich auf einen Kilometer von gerader Nummer bezieht, möge ich gewonnen haben; die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für mich dann gleich $^1/_2$; weshalb? Weil dann die entsprechende Ursache sich auf einen Millimeter von gerader Nummer beziehen muß. Die Wahrscheinlichkeit dafür aber, daß die Ursache zwischen gewissen Grenzen variiert, ist offenbar proportional der gegenseitigen Entfernung dieser Grenzen, wenn nur diese Entfernung sehr klein ist. Wollte man diese Annahme nicht machen, so wäre es nicht mehr möglich, die Wahrscheinlichkeit durch eine stetige Funktion darzustellen.

Was geschieht nun, wenn große Ursachen kleine Wirkungen hervorbringen? In diesem Falle schreiben wir die Erscheinung nicht dem Zufalle zu, während umgekehrt Lumen sie dem Zufalle zuschreiben würde. Einer Differenz von einem Kilometer in der Ursache würde jetzt eine Differenz von einem Millimeter in der Wirkung entsprechen. Es kommt jetzt auf die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Ursache zwischen zwei um n Kilometer voneinander entfernten Grenzen enthalten sei; kann diese Wahrscheinlichkeit noch zu n proportional sein? Wir haben keinen Grund zu einer solchen Annahme, denn die Entfernung von n Kilometer ist zu groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wirkung zwischen zwei um n Millimeter voneinander entfernten Grenzen enthalten sei, ist genau dieselbe, sie ist folglich ebenfalls nicht zu n proportional, und das, obgleich diese Entfernung von n Millimetern klein ist. Wir sind daher nicht imstande, das Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Wirkungen durch eine stetige Kurve darzustellen; in analytischem Sinne des Wortes kann diese Kurve deshalb doch stetig bleiben: unendlich kleinen Änderungen der Abszisse werden unendlich kleine Änderungen der Ordinate entsprechen. Aber praktisch wird sie nicht mehr stetig sein: sehr kleinen Änderungen der Abszisse werden nicht mehr sehr kleine

Änderungen der Ordinate entsprechen. Es würde unmöglich werden, die Kurve mit einem gewöhnlichen Bleistift zu zeichnen: das ist kurz gesagt der Sinn meiner Darlegung.

Was folgt hieraus für unser Beispiel? Lumen hat nicht das Recht zu behaupten, daß die Wahrscheinlichkeit der Ursache (wohl verstanden seiner Ursache, die für uns als Wirkung erscheint) notwendigerweise durch eine stetige Funktion dargestellt werden müsse. Aber weshalb haben wir dann dieses Recht? Weil jener Zustand des unstabilen Gleichgewichtes, den wir soeben als Anfangszustand bezeichneten, selbst nur der Endpunkt einer vorausgegangenen langen geschichtlichen Entwicklung ist. Im Laufe dieser Geschichte haben verwickelte Ursachen gewirkt, und zwar lange Zeit hindurch: sie haben zur Mischung der Elemente beigetragen und waren bestrebt, alles gleichförmig zu gestalten, wenigstens in einem beschränkten Raume; sie haben die Ecken abgerundet, die Berge abgetragen und die Täler ausgefüllt: so willkürlich und unregelmäßig die ursprünglich ihnen ausgelieferte Kurve auch gewesen sein mag, sie haben so lange an ihrer Regulierung gearbeitet, daß sie uns schließlich eine stetige Kurve überliefern konnten. Und deshalb können wir mit vollem Vertrauen die Stetigkeit voraussetzen.

Lumen hat keine Veranlassung in gleicher Weise zu schlußfolgern; für ihn erscheinen die verwickelten Ursachen nicht als Mittel zur Regulierung und Nivellierung, sie erzeugen im Gegenteil Unterschiede und Ungleichheiten. Aus einer Art von ursprünglichem Chaos würde er eine immer bunter werdende Welt hervorgehen sehen; die von ihm beobachteten Veränderungen würden ihm unvermittelt erscheinen und nicht vorausgesagt werden können; er würde sie irgend welcher Willkür zuschreiben müssen; aber diese Willkür wäre ganz etwas anderes als unser Zufall, denn sie würde sich keinem Gesetze fügen, während unser Zufall doch seine Gesetze hat. Alle diese Punkte erfordern noch längere Entwicklungen und würden dann vielleicht zu einem

besseren Verständnis für die Nicht-Umkehrbarkeit des Universums führen.

VIII.

Wir haben uns bemüht, den Zufall zu definieren, es bleibt jedoch noch eine Frage zu beantworten. Kann man dem Zufalle, wie wir ihn definiert haben, einen objektiven Charakter beilegen?

Diese Frage wollen wir uns stellen. Ich habe von kleinen und von sehr verwickelten Ursachen gesprochen. Was aber sehr klein für den einen ist, kann sehr groß für den andern sein, und was dem einen sehr verwickelt vorkommt, kann dem andern sehr einfach erscheinen. Durch diese Erwägung werden Fragen angeregt, auf die ich schon teilweise geantwortet habe, denn ich erörterte weiter oben (vgl. S. 69) ziemlich genau, in welchem Falle die Differentialgleichungen eines Problems zu einfach werden und deswegen die Gesetze des Zufalls nicht mehr anwendbar sind. Jetzt wollen wir diese Fälle etwas genauer untersuchen, denn man kann sie noch von anderen Gesichtspunkten aus betrachten.

Was bedeutet das Wort „sehr klein"? Zum Verständnisse desselben können wir uns wieder auf das weiter oben Gesagte beziehen. Eine Differenz, ein Intervall ist sehr klein, wenn die Wahrscheinlichkeit innerhalb der Grenzen dieses Intervalls wesentlich konstant bleibt. Und weshalb kann diese Wahrscheinlichkeit innerhalb eines kleinen Intervalles als konstant betrachtet werden? Weil wir voraussetzen, daß das Wahrscheinlichkeitsgesetz durch eine stetige Kurve dargestellt wird, und zwar durch eine Kurve, die nicht nur in analytischem Sinne des Wortes, sondern auch praktisch stetig verläuft, wie ich oben auseinandersetzte. Das soll heißen: die Kurve soll nicht nur keinen eigentlichen Sprung aufweisen, sondern sie soll auch keine allzu spitzen und allzu hervortretenden Ecken und Windungen haben.

Was gibt uns das Recht zu dieser Annahme? Auch das haben wir schon erörtert: Seit Anbeginn der Welt waren

verwickelte Ursachen wirksam, die noch heute in gleichem Sinne bestehen und welche die Welt andauernd einer allgemeinen Gleichförmigkeit zuführen, ohne daß jemals ein früherer Zustand wieder erreicht werden könnte. Diese Ursachen haben allmählich die Spitzen abgeschliffen und die Windungen ausgefüllt, und infolgedessen verlaufen unsere Wahrscheinlichkeitskurven nur noch leicht wellenförmig. In Milliarden und aber Milliarden von Jahrhunderten wird man dieser Gleichförmigkeit um einen Schritt näher gekommen sein, und die wellenförmigen Biegungen der Kurve werden noch zehnmal schwächer verlaufen; d. h. der mittlere Krümmungsradius unserer Kurve wird zehnmal größer geworden sein. Eine gewisse Länge, die uns heute nicht sehr klein erscheint, weil ein Kurvenbogen von dieser Länge nicht als gradlinig betrachtet werden kann, wird im Gegenteil in einer fernen Epoche als sehr klein gelten, weil die Krümmung zehnmal kleiner geworden ist und weil ein Bogen von dieser Länge sich dann wesentlich einer geraden Linie nähert.

Das Wort „sehr klein“ hat demnach nur eine relative Bedeutung; aber es ist nicht relativ in bezug auf diesen oder jenen Menschen, sondern es ist relativ in bezug auf den gegenwärtigen Zustand der Welt. Es wird seine Bedeutung ändern, wenn die Welt gleichförmiger geworden ist, d. h. wenn alles noch mehr durcheinander gemischt ist. Dann aber werden Menschen nicht mehr existieren können und sie müssen anderen Wesen Platz machen, viel kleineren oder viel größeren vielleicht. Und in diesem Falle bliebe unser Kriterium für alle Menschen gültig, behielte also eine objektive Bedeutung.

Was bedeutet andererseits das Wort „sehr verwickelt“? Auf eine schon früher gegebene Antwort habe ich mich am Anfang dieses Paragraphen bezogen, es gibt jedoch noch andere Antworten. Die verwickelten Ursachen, sagten wir, bringen eine immer innigere Mischung hervor, nach wie

langer Zeit aber wird uns diese Mischung als hinreichend erscheinen? Wann werden sich genügend viele Umstände vereinigt haben? Wann sind die Karten hinreichend gemischt? Wenn wir zwei Pulver mischen, ein blaues und ein weißes, dann tritt ein Moment ein, wo uns die Farbe der Mischung gleichförmig vorkommt, aber nur infolge der Unvollkommenheit unserer Sinne; sie ist gleichförmig für den Weitsichtigen, der die Mischung von ferne betrachten muß, während sie dem Kurzsichtigen noch ungleichförmig erscheint. Wenn sie für alle Augen gleichförmig geworden ist, so kann man diese Grenze durch Anwendung von Instrumenten noch weiter hinausschieben. Es ist nicht zu erwarten, daß irgendein Mensch jemals die unendliche Mannigfaltigkeit unterscheidet, die sich nach der kinetischen Gastheorie unter der einförmigen Erscheinung eines Gases verbirgt. Und doch scheint das Mikroskop im Begriffe zu sein, uns etwas Analoges zu offenbaren, wenigstens wenn man die Ideen von Gouy über die Brownschen Bewegungen annimmt.[24])

Dieses neue Kriterium ist demnach ebenso wie das erste relativ, und es hat nur deshalb einen objektiven Charakter, weil alle Menschen ungefähr gleiche Sinne haben, weil die Macht ihrer Instrumente beschränkt ist und weil sie sich solcher Instrumente nur ausnahmsweise bedienen.

IX.

Dasselbe gilt für die historisch-philosophischen Wissenschaften, besonders für die eigentliche Geschichte. Aus den Ereignissen der von ihm studierten Epoche muß der Historiker eine Auswahl treffen; er berücksichtigt nur diejenigen, die ihm am wichtigsten zu sein scheinen. Er begnügt sich also z. B. die bedeutendsten Ereignisse des sechzehnten Jahrhunderts zu berichten, ebenso die bemerkenswertesten Tatsachen des siebzehnten Jahrhunderts. Wenn die ersteren genügen, um die letzteren zu erklären, so sagt man „diese letzteren ent-

sprechen den Gesetzen der Geschichte". Wenn indessen ein bedeutendes Ereignis des siebzehnten Jahrhunderts durch eine unbedeutende Tatsache des sechzehnten Jahrhunderts bedingt wird, die kein Geschichtswerk berichtet und die man gänzlich vergessen hatte, dann sagt man „dieses Ereignis ist dem Zufall zuzuschreiben"; das Wort Zufall hat also hier dieselbe Bedeutung wie in den physikalischen Wissenschaften; es sagt aus, daß kleine Ursachen große Wirkungen hervorgebracht haben.

Der größte Zufall ist die Geburt eines großen Mannes. Nur durch Zufall sind sich zwei Geschlechtszellen verschiedenen Geschlechts begegnet, deren jede gerade diejenigen geheimnisvollen Elemente enthielt, deren gegenseitige Einwirkung das Genie hervorbringen mußte. Niemand zweifelt daran, daß solche Elemente sehr selten sind und daß ihre Vereinigung noch seltener ist. Wie leicht hätte das Spermatozoid, das die Elemente in sich trug, von seiner Bahn nur wenig abgelenkt werden können! Eine Ablenkung von einem Zehntel Millimeter hätte genügt, und Napoleon wäre nicht geboren und die Schicksale eines Kontinents wären andere gewesen. Kein Beispiel kann besser den eigentlichen Charakter des Zufalls erkennen lassen.

Noch ein Wort über die paradoxen Resultate, zu denen man durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die historisch-philosophischen Wissenschaften geführt wird. Man hat bewiesen, daß in keine Kammer jemals ein Abgeordneter der Opposition gewählt würde, oder wenigstens hat man ein solches Ereignis als so unwahrscheinlich nachgewiesen, daß man ruhig auf das Gegenteil wetten könnte, und zwar eine Million gegen einen Sou. Condorcet hat sich bemüht zu berechnen, wieviele Geschworene nötig wären, damit ein Rechtsirrtum praktisch unmöglich wird. Wenn man die Resultate dieser Rechnung angewandt hätte, so würde man sich denselben Enttäuschungen ausgesetzt haben, als wenn man im Vertrauen auf die Rechnung gewettet

hätte, daß die Opposition niemals einen Vertreter in einer Kammer haben würde.[25])

Die Gesetze des Zufalls sind auf solche Fragen nicht anwendbar. Wenn das Gericht sich bei seinen Entscheidungen nicht immer durch richtige Gründe leiten läßt, so macht es weniger als man denkt von der Bridoyeschen Methode Gebrauch; das ist vielleicht zu bedauern, denn das Condorcetsche System würde uns die Rechtsirrtümer ersparen.

Worin liegt der Grund für diese negativen Resultate? Wir sind versucht Tatsachen dieser Art dem Zufall zuzuschreiben, weil ihre Gründe verdeckt sind; aber es handelt sich dabei nicht um wirklichen Zufall. Die Ursachen sind uns unbekannt, das ist richtig, und sie sind auch verwickelt; aber sie sind nicht hinreichend verwickelt, denn es gibt etwas, das sie stets unverändert lassen; wir haben oben gesehen, daß dadurch die „zu einfachen" Ursachen charakterisiert sind. Wenn sich Menschen versammeln, so hängen ihre Entschließungen nicht mehr vom Zufall ab, denn sie sind nicht voneinander unabhängig und sie wirken aufeinander ein. Es treten vielfache Ursachen in Wirksamkeit, durch welche die Menschen verwirrt und nach rechts oder links gezogen werden; aber es gibt etwas, das dabei nicht zerstört wird: das ist die Gewohnheit der großen Massen, einem Leithammel zu folgen. Das bleibt stets unverändert.

X.

Auch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die exakten Wissenschaften führt oft zu Schwierigkeiten. Weshalb sind die Dezimalen einer Logarithmentafel, weshalb die Dezimalen der Zahl π gemäß den Gesetzen des Zufalls verteilt? Für die Logarithmen habe ich diese Frage schon bei anderer Gelegenheit behandelt, und da ist die Antwort leicht; offenbar gibt eine kleine Differenz im Argument eine kleine Differenz im Logarithmus, aber eine

große Differenz in der sechsten Dezimale des Logarithmus. Wir finden somit immer wieder dasselbe Kriterium.[26])

Für die Zahl π bereitet die Frage jedoch mehr Schwierigkeiten, und ich weiß augenklicklich nichts Bestimmtes darüber zu sagen.

Man könnte noch viele andere Fragen aufwerfen, aber ich will sie hier nicht stellen, bevor ich die Frage gelöst habe, deren Behandlung ich mir hauptsächlich vorgenommen hatte. Wenn wir ein einfaches Resultat erhalten, z. B. durch Rechnung eine runde Zahl finden, so sagen wir, ein solches Resultat könne nicht zufällig sein, und wir suchen nach einer nicht zufälligen Ursache, um das Resultat zu erklären. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 10000 Zahlen der Zufall gerade eine runde Zahl, z. B. die Zahl 10000 ergibt, ist in der Tat sehr klein; sie ist nur 1 gegen 10000. Genau ebenso groß ist indessen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zufall irgendeine andere Zahl ergibt; und dennoch würde uns ein solches Resultat nicht wundern, und wir würden nicht anstehen, es dem Zufalle zuzuschreiben; einfach deshalb, weil dieses Resultat weniger auffällt.

Geben wir uns dabei einer Täuschung hin, oder hat diese Betrachtungsweise einen tieferen Grund? Das letztere müssen wir hoffen, denn sonst würde jede Wissenschaft unmöglich sein. Was tun wir, um eine Hypothese zu kontrollieren? Wir können nicht alle Folgerungen prüfen, denn deren Anzahl ist unendlich groß; wir begnügen uns damit, einige zu prüfen, und wenn wir dabei Erfolg haben, gilt uns die Hypothese als gesichert, denn so viele Erfolge könnten nicht durch den bloßen Zufall bedingt sein. Diese Schlußweise wird im Grunde immer wiederholt.

Ich kann sie hier nicht vollständig begründen, das würde zu viel Zeit kosten; aber ich kann wenigstens folgendes sagen: wir haben die Wahl zwischen zwei Hypothesen: entweder nehmen wir eine einfache Ursache oder eine Menge verwickelter Ursachen, die wir eben Zufall nennen. Die An-

nahme, daß erstere auch ein einfaches Resultat hervorbringe, finden wir natürlich, und wenn wir sodann bei unseren Untersuchungen auf ein solches einfaches Resultat, z. B. auf eine runde Zahl, geführt werden, so erscheint es uns wahrscheinlicher, daß dies durch eine einfache Ursache bedingt sei, die fast unmittelbar dazu führen müßte, als durch den Zufall, der es nur einmal unter 10 000 Fällen herbeiführen könnte. Anders verhält es sich, wenn wir ein nicht einfaches Resultat finden; der Zufall allerdings könnte es auch nur einmal unter 10 000 Fällen herbeiführen; aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine einfache Ursache dabei bestimmend war, ist jetzt sehr viel geringer.

Zweites Buch.
Die mathematische Schlußweise.

Erstes Kapitel.
Die Relativität des Raumes.

I.

Es ist unmöglich, sich den leeren Raum vorzustellen; alle unsere Bemühungen einen reinen Raum zu denken, aus dem die wechselnden Bilder der materiellen Objekte verbannt sind, können höchstens zu einer Vorstellung führen, bei der etwa die starkgefärbten Flächen durch schwachgefärbte Linien ersetzt sind, und je weiter man in dieser Weise fortschreitet, desto mehr löst sich alles auf, und schließlich zerfällt alles in Nichts. Daraus entsteht der nicht weiter zurückführbare Begriff von der Relativität des Raumes.

Wer von einem absoluten Raume spricht, bedient sich eines Wortes, das keinen Sinn hat. Diese Wahrheit ist längst von allen denjenigen anerkannt, die über die Frage nachgedacht haben, und doch läßt man sich zu oft verleiten, sie zu vergessen.

Ich befinde mich an einem bestimmten Punkte in Paris, z. B. Place du Panthéon, und ich sage: morgen werde ich hierher zurückkehren. Wenn man mich fragt „wollen Sie damit sagen, daß Sie an denselben Punkt des Raumes zurückkehren wollen", so bin ich in Versuchung, diese Frage zu bejahen; und doch wäre das nicht richtig, denn von heute bis morgen wird die Erde mehr als zwei Millionen Kilometer durchlaufen und dabei den Panthéonplatz mit sich geführt haben. Wenn ich mich in Rücksicht hierauf genauer ausdrücken wollte, so würde ich damit nicht weiter

kommen, denn unsere Erde hat diese zwei Millionen Kilometer in ihrer Bewegung um die Sonne zurückgelegt, die Sonne aber bewegt sich ihrerseits im Verhältnis zur Milchstraße, und die Milchstraße selbst ist sicher ebenfalls in Bewegung, wenn wir auch ihre Geschwindigkeit nicht kennen. Wir sind also in vollkommener Unkenntnis darüber, um wieviel sich der Panthéonplatz an einem Tage bewegt, und werden auch stets darüber in Unkenntnis bleiben. Ich habe also eigentlich nur folgendes sagen wollen: morgen werde ich die Kuppel und die Front des Panthéon wiedersehen, und wenn es kein Panthéon gäbe, so hätte mein Ausspruch keinen Sinn und der Raum an sich zerflösse in Nichts.

Das ist eine der gewöhnlichsten Formen, in denen das Prinzip von der Relativität des Raumes erscheint; es gibt aber noch eine andere Form, und auf diese hat Delbeuf besonders aufmerksam gemacht. Nehmen wir an, daß in einer Nacht alle Dimensionen des Universums tausendmal größer werden: die Welt bleibt dann ähnlich zu sich selbst, wenn wir das Wort Ähnlichkeit in demselben Sinne gebrauchen, wie es im dritten Buche von Euklid angewendet wird. Was früher einen Meter lang war, mißt jetzt einen Kilometer, und was einen Millimeter lang war, hat jetzt die Länge eines Meters. Das Bett, in dem ich liege und mein eigener Körper vergrößern sich in demselben Verhältnisse. Wenn ich dann am andern Morgen aufwache — was werde ich wohl bei dieser erstaunlichen Veränderung empfinden? Das ist ganz einfach: ich werde nichts von dem allen bemerken. Selbst die genauesten Instrumente werden nicht imstande sein, mir irgend etwas von dieser ungeheuren Umwälzung zu offenbaren, denn das Metermaß, dessen ich mich bediene, wird genau in demselben Verhältnisse gewachsen sein, wie die Gegenstände, die ich zu messen versuche. Diese Umwälzung existiert tatsächlich nur für diejenigen, welche bei ihren Schlüssen von einem absoluten Raume ausgehen. Wenn ich für einen Augenblick ihnen gefolgt bin, so ge-

schah dies, um den Widerspruch besser erkennen zu lassen, der ihrer Anschauungsweise anhaftet. Da der Raum nur relativ ist, so hätte man besser sagen sollen: es hat sich überhaupt nichts ereignet, und deshalb konnten wir auch nichts bemerken.

Hat man überhaupt noch das Recht, von der Entfernung zweier Punkte zu sprechen? Nein, denn diese Entfernung könnte gewaltige Änderungen erleiden, ohne daß wir etwas davon merken, wenn nur alle anderen Entfernungen sich in demselben Verhältnisse verändern. Wenn ich sage: „morgen werde ich hier sein", so soll damit, wie wir soeben gesehen haben, nicht gesagt sein: „morgen werde ich an demselben Punkte des Raumes sein, wo ich mich heute befinde", sondern: „morgen werde ich mich in derselben Entfernung vom Panthéon befinden wie heute". Und selbst diese Aussage ist nicht mehr genügend; ich müßte eigentlich sagen: „morgen und heute wird meine Entfernung vom Panthéon im Verhältnis zur Länge meines Körpers durch dieselbe Zahl gemessen werden."

Noch mehr: ich habe vorausgesetzt, daß die Dimensionen der Welt sich ändern, aber doch immer derart, daß die Welt stets zu sich selbst ähnlich ist. Man kann noch viel weiter gehen, und die modernen Physiker haben uns in einer ihrer überraschendsten Theorien ein Beispiel dafür gegeben. Nach Lorentz und Fitzgerald*) erleiden alle Körper, welche die Erde in Richtung ihrer Bewegung mit sich führt, eine Deformation. Allerdings ist dieselbe sehr schwach, denn alle parallel der Bewegung der Erde gemessenen Dimensionen sollen sich nur um ein Hundertmilliontel verkleinern, während alle senkrecht zu dieser Bewegung gemessenen Dimensionen unverändert bleiben. Für die Folgerungen, die ich hieran knüpfen werde, genügt es, daß diese Deformation existiert, sei sie auch noch so geringfügig. Wenn ich sage,

*) Vgl. unten Kapitel II des dritten Buches.

daß sie geringfügig ist, so muß ich hinzufügen, daß ich in Wahrheit nichts darüber weiß; ich war eben selbst das Opfer der unausrottbaren Illusion, die uns an die Vorstellung eines absoluten Raumes glauben läßt; ich dachte im Augenblicke an die Erde in ihrem elliptischen Laufe um die Sonne und nahm für sie eine Geschwindigkeit von 30 Kilometern an. Ihre wirkliche Geschwindigkeit jedoch (ich meine damit jetzt nicht ihre absolute Geschwindigkeit, denn von der zu sprechen hat keinen Sinn, sondern ihre Geschwindigkeit im Verhältnisse zum Äther) kenne ich nicht, ich habe auch kein Mittel sie kennen zu lernen: sie ist vielleicht 10fach oder 100fach größer, und dann würde die Deformation 100mal oder 10000mal stärker sein.

Können wir uns über die Existenz dieser Deformation Rechenschaft geben? Offenbar nicht; gegeben sei ein Kubus mit einem Meter Seitenlänge; infolge der Bewegung der Erde wird er deformiert, diejenige seiner Seiten, welche der Bewegung parallel wird, wird kleiner, die anderen Seiten ändern sich nicht. Wenn ich mich dessen mit Hilfe eines Metermaßes vergewissern will, so werde ich zuerst die zur Bewegung senkrechten Seiten messen und feststellen, daß mein Meter sich genau mit dieser Seite deckt; tatsächlich hat sich ja auch keine der beiden Längen geändert, denn beide liegen senkrecht zur Bewegung. Sodann werde ich die andere Seite messen, die zur Bewegung parallel ist; zu dem Zwecke verändere ich die Lage meines Maßstabes, indem ich ihn so drehe. daß er sich mit dieser anderen Seite deckt. Da er jetzt seine Richtung geändert hat und der Bewegung parallel geworden ist, so hat er seinerseits auch eine Deformation erlitten, so daß seine Länge sich genau mit der Länge der Seite deckt, obgleich letztere weniger als einen Meter beträgt; von der Deformation werde ich also nichts bemerken.

Man wird fragen, welchen Nutzen dann die Hypothese von Lorentz und Fitzgerald hat, wenn doch kein Ex-

periment ihre Prüfung gestattet? Meine Darstellung war in der Tat noch unvollständig; ich habe nur von Messungen gesprochen, die man mit einem Maßstabe ausführen kann; man kann eine Länge auch mit der Zeit messen, die das Licht braucht, um sie zu durchlaufen, vorausgesetzt, daß man die Lichtgeschwindigkeit als konstant und unabhängig von ihrer Richtung annimmt. Lorentz hätte die Tatsachen auch durch die Annahme erklären können, daß die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Erdbewegung größer sei als in der dazu senkrechten Richtung. Er zog es vor anzunehmen, daß die Lichtgeschwindigkeit in beiden Richtungen die gleiche sei, und daß dafür die Körper in der einen Richtung kleiner werden als in der andern Richtung. Wenn die Wellenflächen des Lichtes dieselben Deformationen erleiden würden, wie die materiellen Körper, so würden wir die von Lorentz und Fitzgerald angenommene Deformation nicht bemerken können.

In keinem der beiden Fälle kann von absoluter Größe die Rede sein, sondern nur von einem Messen dieser Größe mit Hilfe irgendeines Instrumentes; letzteres kann ein Metermaß sein oder der vom Lichte durchlaufene Weg; wir messen immer nur das Verhältnis der betreffenden Größe zum Instrument; und wenn dieses Verhältnis sich ändert, so haben wir kein Mittel zu erkennen, ob die Größe oder das Instrument sich geändert hat. Besonders zu beachten ist, daß bei dieser Deformation die Welt nicht zu sich selbst ähnlich bleibt; die Quadrate werden Rechtecke oder Parallelogramme, die Kreise werden Ellipsen, die Kugeln werden Ellipsoide; dennoch haben wir kein Mittel, uns darüber zu vergewissern, ob eine solche Deformation tatsächlich stattfindet.

Offenbar könnte man noch weiter gehen: statt der Deformation von Lorentz und Fitzgerald, deren Gesetze außerordentlich einfach sind, könnte man eine gänzlich willkürliche Deformation erdenken. Die Körper würden sich dann nach irgendwelchen Gesetzen deformieren, und wir würden

dies doch nicht bemerken, wenn nur die Deformation aller Körper ohne Ausnahme nach den gleichen Gesetzen erfolgt. Mit den Worten: „alle Körper ohne Ausnahme“ schließe ich, wohlverstanden, unsern eigenen Körper mit ein, und ebenso die Lichtstrahlen, die von den verschiedenen Objekten ausgehen.

Wenn wir die Welt in einem jener kompliziert gestalteten Spiegel betrachten, welche die Gegenstände verzerren, so bleiben dabei doch die gegenseitigen Verhältnisse der einzelnen Teile dieser Welt unverändert; wenn sich zwei wirkliche Gegenstände berühren, so scheinen sich auch ihre Spiegelbilder zu berühren. Bei dem Blick in einen solchen Spiegel bemerken wir die Deformation sofort, aber nur deshalb, weil die wirkliche Welt neben dem verzerrten Spiegelbilde steht; und selbst wenn uns diese wirkliche Welt verdeckt wäre, so gibt es immer etwas, das man nicht verdecken kann, das sind wir selbst; wir hören nicht auf, unseren Körper und unsere Glieder zu sehen oder wenigstens zu fühlen, und diese sind nicht deformiert, und dienen uns andauernd als Meßinstrumente. Stellen wir uns dagegen vor, daß unser Körper in derselben Weise deformiert werde wie wir ihn im Spiegel sehen, so würden auch diese Meßinstrumente versagen und die Deformation könnte nicht festgestellt werden.

Hier haben wir zwei Welten, von denen die eine das Spiegelbild der andern ist; jedem Gegenstande P der Welt A entspricht in der Welt B ein Gegenstand P', der des ersteren Spiegelbild ist; die Koordinaten dieses Bildes P' sind bestimmte Funktionen der Koordinaten des Gegenstandes P; diese Funktionen können übrigens ganz willkürlich gewählt werden; nur setze ich voraus, daß man für alle Gegenstände dieselben Funktionen wählt. Der Ort von P ist dann mit dem Orte von P' durch eine konstante Relation verbunden; es kommt wenig darauf an, welches diese Relation ist; es genügt, daß sie konstant ist.

Diese beiden Welten können nicht voneinander unterschieden werden. Damit will ich sagen, daß die erste für ihre Bewohner dasselbe ist, wie die zweite für die ihrigen. Das gilt, solange die beiden Welten einander fremd bleiben. Nehmen wir an, wir bewohnten die Welt A; wir werden dann in ihr unsere Wissenschaft und insbesondere unsere Geometrie aufgebaut haben; währenddessen werden auch die Bewohner der Welt B ihre Wissenschaft konstruiert haben, und da ihre Welt ein Bild der unsrigen ist, so wird ihre Geometrie auch ein Bild der unsrigen sein, oder, besser ausgedrückt, sie wird mit der unsrigen identisch sein. Wenn indessen eines Tages uns ein Fenster, das in die Welt B geht, geöffnet wird, so werden wir deren Bewohner bedauern: „Die Unglücklichen," werden wir ausrufen, „sie glauben sich eine Geometrie geschaffen zu haben, aber was sie so nennen, ist nur ein Zerrbild unserer Geometrie; ihre geraden Linien sind alle tordiert, ihre Kreise haben Auswüchse, ihre Kugeln sind von sonderbar unregelmäßiger Gestalt." Wir können sicher sein, daß sie ebenso über uns urteilen und daß man niemals wird entscheiden können, wer recht hat.

Man ersieht hieraus, welch eine weitgehende Bedeutung der Relativität des Raumes zukommt; der Raum selbst ist tatsächlich gestaltlos, und nur die Dinge in ihm geben ihm eine Gestalt. Was soll man von der direkten Anschauung denken, die wir von der geraden Linie oder von der Entfernung haben? Wir haben so wenig eine Anschauung von der Entfernung an sich, daß jede Entfernung, wie wir gesehen haben, in einer Nacht tausendmal größer werden kann, ohne daß wir es bemerken, wenn nur gleichzeitig alle anderen Entfernungen dieselbe Änderung erleiden. Es könnte sogar die Welt B in einer Nacht an Stelle der Welt A gesetzt werden, und wir hätten kein Mittel, dies festzustellen; dann aber würden unsere geraden Linien von gestern aufhören gerade zu sein, und doch würden wir nichts davon wahrnehmen.

Ein Teil des Raumes ist nicht an sich und nicht in absolutem Sinne jedem anderen Teile des Raumes gleich; denn wenn die Gleichheit für uns besteht, so besteht sie nicht für die Bewohner der Welt *B*; und letztere können unsere Meinung mit genau demselben Rechte verwerfen, mit dem wir ihre Meinung verurteilen.

Bei anderer Gelegenheit habe ich gezeigt, welche Folgerungen hieraus für die Auffassung zu ziehen sind, die wir uns von der nicht-euklidischen Geometrie und von anderen analogen Geometrien machen müssen[27]), ich will darauf jetzt nicht zurückkommen, gegenwärtig will ich die Frage unter einem etwas anderen Gesichtspunkte betrachten.

II.

Wenn eine solche direkte Anschauung von einer Entfernung, von einer Richtung, von einer geraden Linie, kurz vom Raume nicht existiert, woher kommt es dann, daß wir sie zu besitzen glauben? Wenn dies nur auf Einbildung beruht, woher kommt es, daß diese Einbildung so fest sitzt? Das wollen wir jetzt näher prüfen. Wie wir ausgeführt haben, besitzen wir keine direkte Anschauung einer Größe, und wir können nie mehr erreichen als das Verhältnis der Größe zu unseren Meßinstrumenten. Wir könnten also den Raum ohne Anwendung eines Meßinstrumentes nicht konstruieren; dies Instrument nun, auf das wir alles beziehen und dessen wir uns instinktiv bedienen, ist unser eigener Körper. Nur in bezug auf unseren Körper beurteilen wir die Lage der Gegenstände außer uns, und die einzigen räumlichen Beziehungen dieser Gegenstände, die wir uns vorstellen können, sind ihre Beziehungen zu unserem Körper. Der letztere dient uns sozusagen als System von Koordinatenachsen.

Nehmen wir z. B. an: in einem Augenblick α wird mir der Gegenstand *A* durch den Gesichtssinn vergegenwärtigt; in einem andern Augenblick β wird mir die Gegenwart eines andern Gegenstandes *B* durch einen andern Sinn, etwa

durch das Gehör oder den Tastsinn, zum Bewußtsein kommen. Ich schließe daraus, daß dieser Gegenstand B denselben Platz einnimmt wie der Gegenstand A. Was heißt das? Zunächst bedeutet das nicht, daß diese beiden Gegenstände in zwei verschiedenen Augenblicken im absoluten Raume einen gleichen Punkt innehaben, der sich sogar, wenn er existierte, unserer Erkenntnis entziehen würde, weil zwischen den Augenblicken α und β das Sonnensystem sich geändert hat und wir von dieser Veränderung nichts wahrnehmen. Daraus ist zu entnehmen, daß diese beiden Gegenstände die gleiche relative Stellung nur in Beziehung zu unserem Körper behaupten.

Was soll nun aber wiederum dieses letztere heißen? Die Eindrücke, welche wir von diesen Gegenständen empfangen, gelangten auf gänzlich verschiedenen Wegen zu uns: der Sehnerv kommt für den Gegenstand A in Betracht, der Gehörnerv für den Gegenstand B. Sie haben in qualitativer Beziehung nichts Gemeinsames. Die Vorstellungen, welche wir uns von diesen beiden Gegenständen machen können, sind absolut heterogen, eine ist auf die andere nicht zurückführbar. Ich weiß nur, daß ich, um den Gegenstand A zu erreichen, nur den rechten Arm in einer gewissen Weise auszustrecken brauche; selbst wenn ich von dieser Bewegung absehe, kann ich mir die Muskelempfindungen, welche die Bewegung begleiten würden, vorstellen, und diese Vorstellung ist mit dem Gegenstande A assoziiert.

Andrerseits weiß ich auch, daß ich den Gegenstand B erreichen kann, indem ich den rechten Arm in derselben Art ausstrecke und somit eine Bewegung vollführe, die von den nämlichen Muskelempfindungen begleitet wird. Wenn ich nun sage: die beiden Gegenstände nehmen denselben Platz ein, so will ich damit nur das eben Gesagte ausdrücken.

Ich weiß, daß ich den Gegenstand A auch durch eine andere, vom linken Arm ausgeführte, Bewegung erreichen kann, und ich mache mir die Muskelempfindungen, welche

diese Bewegung begleiten würden, klar: ich würde mit der gleichen Bewegung des linken Armes, die von den gleichen Muskelempfindungen begleitet wird, auf gleiche Art den Gegenstand B erreichen können.

Das ist äußerst wichtig, weil ich mich auf diese Weise gegen die Gefahren verteidigen kann, mit denen mich sowohl der Gegenstand A wie auch der Gegenstand B bedrohen können. Für jeden Hieb, von dem wir getroffen werden können, verleiht uns die Natur einen oder mehrere Gegenhiebe, deren wir uns bedienen können. Die gleiche Parade dient für mehrere Hiebe; so erklärt es sich, daß eine und dieselbe Bewegung des rechten Armes uns die Verteidigung im Moment α gegen den Gegenstand A und im Moment β gegen den Gegenstand B ermöglichen würde. Also kann derselbe Hieb auf verschiedene Art pariert werden, und wir erwähnten eben, daß man ebensogut den Gegenstand A durch eine bestimmte Bewegung des rechten, wie auch durch eine bestimmte Bewegung des linken Armes erreichen kann.

Alle diese Paraden haben untereinander nichts Gemeinsames, es sei denn, das eine, daß sie gestatten, uns gegen ein und denselben Hieb zu wahren; und gerade dieses und nichts anderes als dieses ist es, was wir darunter verstehen, wenn wir sagen, daß diese Bewegungen in demselben Raumpunkte zusammentreffen. Ebenso haben auch diese Gegenstände, von denen wir behaupten, daß sie denselben Punkt im Raume innehaben, nichts Gemeinsames, es sei denn das eine, daß es uns ermöglicht wird, uns mit der gleichen Parade gegen sie zu verteidigen.

Man kann sich auch unzählige Telegraphendrähte vorstellen, von denen die einen zentripetal, die anderen zentrifugal sind. Die zentripetalen Drähte benachrichtigen uns von den Vorgängen, welche sich außerhalb abspielen, die zentrifugalen Drähte sollen diesen Vorgängen nach auswärts entgegenwirken. Die Verbindungen werden folgendermaßen

hergestellt: wenn eiu zentripetaler Draht von einem Strom durchlaufen wird, so wirkt dieser Strom auf ein Relai und erregt dadurch einen Strom in einem der zentrifugalen Drähte, und es ist dergestalt eingerichtet, daß mehrere zentripetale Drähte auf den gleichen zentrifugalen Draht einwirken können, sobald das gleiche Hilfsmittel gegen verschiedene Übel anwendbar ist, und daß ein zentripetaler Draht verschiedene zentrifugale Drähte entweder gleichzeitig, oder die einzelnen unabhängig von einander, stets dann beeinflussen kann, wenn dasselbe Übel durch verschiedene Mittel heilbar ist.

Dieses komplexe System von Assoziationen, dieses Bild ihrer Verteilungsart macht sozusagen unsere ganze Geometrie aus, oder, wenn man so sagen will, umfaßt alles, was unserer Geometrie instinktiv zugrunde liegt. Was wir unsere Anschauung von der geraden Linie und von der Entfernung nennen, ist der Begriff, den wir von diesen Assoziationen und von ihrem zwingenden Charakter haben.

Woher dieser zwingende Charakter stammt, ist leicht zu erklären. Eine Assoziation erscheint uns um so unzerstörbarer, je älter sie ist. Diese Assoziationen sind zum großen Teil keine Erwerbungen des Individuums, denn man merkt ihre Spur schon bei dem Kinde, das eben das Licht der Welt erblickt: es sind Erwerbungen, die der Rasse zu eigen werden. Die natürliche Zuchtwahl mußte diese Erwerbungen um so schneller herbeiführen, je notwendiger sie sind.

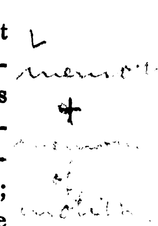
Aus diesem Grunde mußten die in Frage kommenden Erwerbungen die frühesten sein, denn ohne sie wäre die Verteidigung des Organismus unmöglich gewesen. Seitdem die Zellen nicht mehr nebeneinander liegen, ohne sich zu beeinflussen, und seitdem sie vielmehr dazu berufen sind, sich gegenseitig zu unterstützen, konnte es sich ereignen, daß sich ein Mechanismus herausbildet, der demjenigen analog ist, den wir soeben beschrieben haben, damit diese Unterstützung den rechten Weg einschlägt, um der Gefahr zu begegnen.

Wenn man einem Frosche den Kopf abschneidet und dann etwas Salzsäure auf die Haut tropft, so versucht das Tier den Tropfen mit dem nächsten Fuße wegzuwischen, und ist dieser Fuß amputiert, so versucht der Frosch es mit dem andern Fuße. Das ist ein Beispiel für die doppelte Möglichkeit einer Parade, von der ich vorhin sprach; sie ermöglicht ein Übel durch ein zweites Hilfsmittel zu bekämpfen, wenn das erste versagt. Diese vielfache Möglichkeit der Verteidigungsmittel und die darausfolgende Koordination ist es, was wir den Raum nennen.

Man sieht, bis zu welcher Tiefe des Unbewußten man herabsteigen muß, um die ersten Spuren dieser räumlichen Assoziationen zu finden, weil hier nur die untergeordnetsten Teile des Nervensystems in Betracht kommen. Wie sollte man sich da über den Widerstand wundern, den wir jedem Versuche entgegensetzten, der auflösen und dissoziieren will, was so lange verbunden und assoziiert war? Andererseits ist eben dieser Widerstand das, was wir Evidenz der geometrischen Wahrheiten nennen; diese Evidenz ist nichts anderes als die Abneigung, die man empfindet, mit uralten Gewohnheiten zu brechen, in denen man sich bisher sehr wohl fühlte.

III.

Der so geschaffene Raum ist nur ein kleiner Raum, nicht größer als meine Armeslänge beträgt; man benötigt die Vermittlung des Gedächtnisses, um die Grenzen dieses Raumes zu erweitern. Es gibt Punkte, die außerhalb meines Bereiches bleiben werden, auch wenn ich noch so viele Anstrengungen mache, um sie mit der Hand zu erreichen; wenn ich z. B. wie ein Meerpolyp, der nur seine Tastarme ausstrecken kann, an den Boden gefesselt wäre, so würden mir diese Punkte alle als außerhalb des Raumes befindlich erscheinen, weil die Sinnesempfindungen, die in uns unter der Einwirkung der dort vorhandenen Körper entstehen könnten, nicht mit der Idee irgendeiner Bewegung assoziiert



wären, welche uns sie zu erreichen gestattete, und weil ihnen also keine geeignete Parade entspricht. Diese Empfindungen würden für uns scheinbar keinen räumlichen Charakter haben, und wir kämen nicht in die Versuchung, sie irgendwo zu lokalisieren.

Wir sind nun aber nicht an den Boden gefesselt wie die niederen Tierarten; wir können, wenn der Feind noch entfernt ist, zuerst auf ihn zuschreiten, und dann die Hand ausstrecken, wenn wir ihm nahe genug sind. Das ist ebenfalls eine Parade, aber eine Parade auf weitere Entfernung hin. Andererseits ist es eine zusammengesetzte Parade, und zu der Vorstellung, die wir uns von der Parade machen, kommen hinzu: die Vorstellung der Muskelempfindungen, welche durch Beinbewegungen verursacht werden, dann die Vorstellung der Muskelempfindungen, welche durch die schließliche Bewegung des Armes hervorgebracht werden, die Vorstellung der Empfindungen der halbzirkelförmigen Kanäle im Labyrinth des Ohres usw.[28])

Wir dürfen uns andererseits nicht eine Gesamtheit gleichzeitiger Empfindungen vorstellen, sondern eine Gesamtheit von sukzessiven Empfindungen, welche in bestimmter Ordnung aufeinander folgen, und darum behauptete ich vorhin, daß die Vermittlung durch das Gedächtnis notwendig sei.

Beachten wir ferner, daß ich denselben Punkt auf verschiedene Weise erreichen kann; ich kann mich z. B. dem zu erreichenden Ziele nähern, damit ich die Hand weniger weit auszustrecken brauche: was folgere ich daraus? Das ist nicht eine, das sind tausend Paraden, die ich ein und derselben Gefahr entgegensetze. Alle diese Paraden sind aus Empfindungen entstanden, welche nichts Gemeinsames untereinander zu haben brauchen, und dennoch benutzen wir sie zur Definition eines und desselben Raumpunktes, weil sie sich derselben Gefahr widersetzen und eine wie die andere mit dem Begriff dieser Gefahr verknüpft sind. Die Einheit dieser verschiedenen Paraden ist durch die Mög-

lichkeit gegeben, daß man durch sie einen und denselben Hieb parieren kann, wie auch die Einheit der verschiedensten Hiebe, die uns von einem und demselben Raumpunkte aus bedrohen können, in der Möglichkeit liegt, daß sie in derselben Weise pariert werden können. Diese doppelte Einheit macht die Individualität eines jeden Punktes im Raume aus, und das ist alles, was wir von dem Begriffe „Punkt“ aussagen können.

Der Raum, den ich im vorhergehenden Paragraphen ins Auge faßte und den ich den eingeschränkten Raum nennen möchte, wäre auf Koordinatenachsen zurückzuführen, die mit meinem Körper verbunden sind; diese Achsen sind festgelegt, wenn mein Körper sich nicht rührt und nur meine Glieder sich bewegen. Welches sind nun die Achsen, auf welche sich naturgemäß der erweiterte Raum zurückführt? D. h. der neue Raum, den ich jetzt definieren will. Wir definieren einen Punkt durch die Reihenfolge von Bewegungen, die man machen muß, um ihn von einer bestimmten Anfangslage unseres Körpers aus zu erreichen. Die Achsen sind also an diese Anfangslage des Körpers gebunden.

Aber die von mir „Anfangslage“ genannte Stellung kann willkürlich unter all den Lagen gewählt sein, die mein Körper nacheinander eingenommen hat; wenn die mehr oder minder unbewußte Erinnerung an diese aufeinander folgenden Lagen für die Entstehung des Raumbegriffes notwendig ist, so kann auch diese Erinnerung mehr oder weniger weit in die Vergangenheit zurückreichen. Daraus entsteht eben bei der Definition des Raumes eine gewisse Unbestimmtheit, und gerade diese Unbestimmtheit bildet die Relativität des Raumes.

Es gibt keinen absoluten Raum, es gibt nur den in Beziehung zu einer gewissen Anfangslage des Körpers relativen Raum. Für ein bewußtes Wesen, das wie die niederen Tierarten an den Boden gefesselt ist, und folglich nur den eingeschränkten Raum kennen würde, erschiene der Raum

noch relativ (weil er auf den Körper des Wesens bezogen ist), aber dieses Wesen würde sich dieser Relativität nicht bewußt sein, weil die Achsen, auf die es diesen eingeschränkten Raum beziehen würde, ihre Lage nicht ändern! Der Felsen, an welchen dieses Wesen gekettet ist, wäre selbstverständlich nicht unbeweglich, da er die Bewegung unseres Planeten mitmacht; für uns würden also diese Achsen jeden Augenblick ihre Lage wechseln; für jenes Wesen aber käme dies nicht in Betracht. Wir besitzen die Fähigkeit, unseren erweiterten Raum bald auf die Position A unseres Körpers, als Anfangslage gedacht, bald auf die Position B, welche er einige Minuten später einnimmt, und die wir beliebig wieder als Anfangslage betrachten können, zurückzuführen; unbewußt nehmen wir also in jedem Augenblicke eine Veränderung der Koordinatenachsen vor. Dem soeben erwähnten Wesen aber fehlt diese Fähigkeit, und es hält den Raum für absolut, weil es nicht auf die Reise gehen kann. In jedem Momente ist ihm sein Achsensystem aufgezwungen; dieses System mag in Wirklichkeit sich noch soviel ändern, für jenes Wesen bleibt es doch immer dasselbe, weil ihm kein anderes bekannt ist. Anders verhält es sich mit uns, da wir in jedem Momente mehrere Systeme zur Verfügung haben, unter denen wir beliebig wählen können, indem wir unser Gedächtnis mehr oder weniger weit in die Vergangenheit zurückgreifen lassen.

Überdies würde der eingeschränkte Raum nicht homogen sein; die verschiedenen Punkte dieses Raumes könnten nicht als gleichwertig angesehen werden, denn die einen könnten nur um den Preis außerordentlicher Anstrengungen erreicht werden, während die anderen leicht erreichbar wären. Unser erweiterter Raum dagegen erscheint uns homogen, und wir sagen, daß alle seine Punkte gleichwertig sind. Was bedeutet diese Aussage?

Wenn wir von einer gewissen Lage A ausgehen, so können wir von hier aus gewisse Bewegungen M ausführen, die durch

ein gewisses System von Muskelempfindungen charakterisiert sind. Gehen wir aber von einer andern Lage B aus, so können wir andere Bewegungen M' ausführen, die durch dieselben Muskelempfindungen charakterisiert werden. Sei nun a die Lage eines gewissen Punktes meines Körpers, z. B. an der Spitze des Zeigefingers meiner rechten Hand, in der Anfangslage A, sei b die Lage dieses gleichen Zeigefingers, nachdem man von der Anfangslage A ausgehend die Bewegungen M ausgeführt hat. Sei ferner a' die Lage dieses Zeigefingers in der Stellung B' und b' seine Lage, nachdem man von der Stellung B ausgehend die Bewegungen M' ausgeführt hat.

Wir sind gewohnt zu sagen, daß die Punkte a und b in derselben Beziehung zueinander stehen wie die Punkte a' und b', und damit meinen wir nichts anderes, als daß die beiden Systeme von Bewegungen M und M' von denselben Muskelempfindungen begleitet werden. Ich habe das Bewußtsein, daß mein Körper beim Übergange von der Stellung A zur Stellung B die Fähigkeit zu den gleichen Bewegungen behalten hat, und deshalb weiß ich, daß es im Raume einen Punkt gibt, der zum Punkte a' in derselben Beziehung steht wie irgendein Punkt b zum Punkte a, und in diesem Sinne nenne ich die beiden Punkte a und a' einander gleichwertig. Das ist es, was man unter Homogenität des Raumes versteht. Eben deshalb ist der Raum auch relativ, denn seine Eigenschaften bleiben dieselben, ob man sie auf die Achsen der Stellung A oder der Stellung B bezieht. Relativität und Homogenität des Raumes ist folglich dasselbe.

Wenn wir jetzt zu dem großen Raume fortschreiten, der nicht nur für uns bestimmt ist, in dem wir vielmehr das Universum unterbringen, so gelangen wir dahin durch einen Akt unserer Einbildungskraft. Wir stellen uns vor, was ein Riese empfinden würde, der mit wenigen Schritten die Planeten erreichen könnte; oder, noch besser, was wir selbst empfinden würden gegenüber einer Miniaturwelt, in der diese Planeten durch kleine Kugeln ersetzt wären, während auf einer dieser

kleinen Kugeln wir selbst als ein Volk von Liliputanern unser Wesen treiben würden. Dieser Akt der Einbildungskraft würde uns unmöglich sein, wenn wir uns nicht vorher unseren eingeschränkten Raum und sodann unseren erweiterten Raum für den persönlichen Gebrauch konstruiert hätten.

IV.

Warum haben nun alle diese Räume drei Dimensionen? Erinnern wir uns des Bildes, das wir uns weiter oben (S. 89f.) von der Verteilungsart unserer Assoziationen gemacht haben. Auf der einen Seite haben wir die Tabelle der verschiedenen Gefahren; wir wollen sie mit A_1, A_2, usw. bezeichnen; auf der andern Seite die Tabelle der verschiedenen Gegenmittel, die ich mit B_1, B_2 usw. bezeichne. Wir haben ferner verschiedene Beziehungen zwischen den Nummern der ersten und zweiten Tabelle, und zwar derart, daß wenn z. B. das Warnungssignal die Gefahr A_3 meldet, es das Relai, welches der Parade B_4 entspricht, in Bewegung setzt oder setzen kann.

Schon als ich weiter oben von zentripetalen oder zentrifugalen Drähten sprach, befürchtete ich wie auch jetzt, daß man in allen diesen Ausführungen nicht einen einfachen Vergleich, sondern eine Beschreibung des Nervensystems vermuten könnte. Das ist keineswegs meine Absicht, und zwar aus folgenden Gründen: vor allem würde ich mir keine Meinung über die Struktur des Nervensystems, die ich nicht genügend kenne, anmaßen, zumal diejenigen, welche sich die Kenntnis dieses Nervensystems zum Studium machen, nur mit großer Vorsicht an solche Probleme herangehen; auch fühle ich, trotz meiner Inkompetenz, daß dieses von mir aufgestellte Schema zu einfach sein würde; schließlich enthält meine Paradentabelle sehr komplizierte Arten, welche selbst im Falle des erweiterten Raumes, wie wir weiter oben erwähnt haben, aus verschiedenen, von Armbewegungen begleiteten Schritten bestehen können. Es handelt sich also nicht um eine physikalische Verbindung zwischen zwei wirklichen

Apparaten, sondern um eine psychologische Assoziation zwischen zwei Reihenfolgen von Empfindungen.

Wenn z. B. die beiden Gefahren A_1 und A_2 mit der Parade B_1 assoziiert sind, und wenn A_1 der Parade B_2 gleichzeitig assoziiert ist, so werden in den meisten Fällen A_2 und B_2 auch assoziiert sein. Wenn dieses Fundamentalgesetz nicht allgemein richtig wäre, so entstände eine ungeheure Verwirrung, und es gäbe nichts, was einer Raumvorstellung oder einem geometrischen Systeme ähnlich wäre. Wie haben wir nun in der Tat einen Punkt im Raume definiert? Wir haben das auf zweierlei Art gemacht: auf der einen Seite ist die Gesamtheit der Warnungssignale A mit einer und derselben Parade B in Verbindung; auf der andern Seite: die Gesamtheit der Paraden B ist in Verbindung mit einem und demselben Warnungssignal A. Wenn unser Fundamentalgesetz nicht richtig wäre, so könnte man sagen, daß A_1 und A_2 einem und demselben Punkte entsprechen, weil alle beide in Verbindung mit B_1 sind; aber man könnte ebenfalls behaupten, daß sie nicht einem und demselben Punkte entsprechen, denn A_1 wäre zwar in Verbindung mit B_2, aber es bestände keine Verbindung zwischen B_2 und A_2. Das wäre ein Widerspruch.

Wenn das Gesetz nun streng und immer richtig wäre, so würde der Raum gänzlich verschieden sein von dem, was er wirklich ist. Wir hätten dann ganz unzusammenhängende Kategorien, auf welche sich einerseits die Warnungssignale A, andrerseits die Paraden B verteilen; die Kategorien würden außerordentlich zahlreich sein, aber gänzlich voneinander getrennt. Der Raum würde dann von sehr zahlreichen, aber diskreten Punkten gebildet, er wäre diskontinuierlich. Dann hätte es keinen Zweck, diese Punkte lieber in die eine als in die andere Ordnung einzureihen, und man hätte auch keinen Grund, dem Raume drei Dimensionen zuzuschreiben.

Aber es verhält sich anders; man gestatte mir, für kurze Zeit die Sprache von Leuten anzuwenden, welche in der Geo-

metrie schon etwas bewandert sind; das ist notwendig, weil die Geometrie die Sprache der Leute ist, von denen ich verstanden sein will. Wenn ich einen Hieb parieren will, so versuche ich an den Punkt zu gelangen, von dem dieser Hieb ausgeht; es genügt, diesem Punkte so nahe wie möglich zu kommen. Dann möge die Parade B_1 den Zeichen A_1 und auch A_2 entsprechen, wenn der Punkt, welcher zu B_1 gehört, gleichzeitig hinreichend nahe den Punkten ist, die zu A_1 und A_2 gehören. Nun könnte es sein, daß der Punkt, welcher einer anderen Parade B_2 entspricht, dem Punkte benachbart ist, welcher A_1 entspricht, und nicht dem Punkte, welcher A_2 entspricht. Somit könnte die Parade B_2 auf A_1 antworten, ohne auf A_2 antworten zu können.

Für denjenigen, welcher in der Geometrie noch nicht Bescheid weiß, würde das in einfacher Weise durch eine Abweichung von dem oben ausgesprochenen Gesetze zu erklären sein. Dann würden sich die Dinge folgendermaßen entwickeln: Zwei Paraden B_1 und B_2 seien der gleichen Warnung A_1 assoziiert, sowie einer großen Anzahl von Warnungen, die wir in dieselbe Kategorie wie A_1 einreihen würden, und die uns mit ein und demselben Punkte im Raume verbinden würden. Wir können aber auf Warnungen A_2 stoßen, welche mit B_2 assoziiert sind und nicht mit B_1, statt dessen aber vielleicht mit B_3 assoziiert wären; dieses B_3 wäre jedoch mit A_1 nicht assoziiert, und immer so weiter, so daß wir also schreiben können:

$$B_1,\ A_1,\ B_2,\ A_2,\ B_3,\ A_3,\ B_4,\ A_4,$$

wobei jedes Glied mit dem folgenden und dem vorhergegangenen assoziiert ist, aber nicht assoziiert ist mit Gliedern, die in der Reihe weiter entfernt stehen.

Es ist unnötig hinzuzufügen, daß jedes der Glieder dieser Reihenfolgen nicht isoliert ist, sondern ein Teil einer sehr umfangreichen Kategorie anderer Warnungszeichen oder anderer Paraden ausmacht, welche dieselben Verbindungen

haben, wie dieses Glied sie hat, und die man als zu einem und demselben Raumpunkte zugehörig betrachten kann. So bleibt das Fundamentalgesetz, auch wenn es Ausnahmen in sich birgt, beinahe immer richtig. Nur daß infolge dieser Ausnahmen die Kategorien, anstatt völlig voneinander getrennt zu sein, teilweise ineinander übergreifen und sich bis zu einem gewissen Grade gegenseitig durchdringen, und zwar derart, daß der Raum kontinuierlich wird.

Übrigens ist die Ordnung, in die sich diese Kategorien einfügen lassen, keineswegs willkürlich, und wenn man z. B. vorstehende Reihe betrachtet, so erkennt man, daß B_2 zwischen A_1 und A_2 stehen muß und folglich auch zwischen B_1 und B_3, und daß man B_2 z. B. nicht zwischen B_3 und B_4 stellen darf.

Es gibt also eine bestimmte Ordnung, in der sich unsere Kategorien, die den Punkten des Raumes entsprechen, einordnen lassen; und die Erfahrung lehrt uns, daß die dadurch gegebene Ordnung sich in Form einer Tabelle mit dreifachem Eingang darstellen läßt, und deshalb hat der Raum drei Dimensionen.

V.

Somit ist also die charakteristische Eigenschaft des Raumes, dreidimensional zu sein, nur eine Eigenschaft des Bildes, das wir uns im obigen Sinne (S. 89 f.) von der Verteilung und Anordnung machen, sozusagen eine interne Eigenschaft menschlicher Intelligenz. Es würde genügen, einige der Konnexe, d. h. der Ideenassoziationen zu zerstören, um ein andersgeartetes Bild der Verteilung vor sich zu haben, und das könnte vielleicht ausreichen, um dem Raume eine vierte Dimension zu verschaffen.

Manche werden sich über ein solches Resultat wundern. Die Außenwelt, so denken sie, muß doch irgendeinen Zweck haben. Wenn die Art, wie wir beschaffen sind, die Anzahl der Dimensionen ausmacht, so könnten sich unter uns denkende Wesen befinden, die zwar innerhalb unserer Welt leben, die

7*

aber anders geartet wären als wir, und die denken könnten, der Raum hätte mehr oder weniger als drei Dimensionen. Hat nicht de Cyon von den japanischen Feldmäusen behauptet, sie hätten nur zwei Paare von halbkreisförmigen Nervenkanälen im Ohre und müßten somit den Raum für zweidimensional halten? Würde nun solch ein denkendes Wesen, wenn es fähig wäre, sich eine Physik aufzubauen, eine zwei- oder vierdimensionale Physik bilden, welche in gewissem Sinne mit der unsrigen doch identisch sein muß, weil sie eine Beschreibung der gleichen Welt, aber in einer andern Sprache darstellt?

Es scheint in der Tat möglich, unsere Physik in die Sprache einer vierdimensionalen Geometrie zu übertragen, aber eine solche Übertragung versuchen, das hieße sich zu viel Arbeit um zu geringen Gewinn machen; ich beschränke mich darauf, die Mechanik von Hertz[29]) anzuführen, der schon Analoges unternahm. Jedoch scheint mir eine solche Übersetzung immer weniger einfach als der ursprüngliche Text zu sein, und man würde immer merken, daß eben eine Übersetzung vorliegt und daß die dreidimensionale Ausdrucksweise unserer Welt sich am besten anpaßt, obgleich die Beschreibung unserer Welt streng genommen auch in anderer Ausdrucksform durchführbar ist.

Andererseits ist unser Bild der Verteilung wohl nicht rein aus Zufall entstanden. Es gibt eine Verbindung zwischen der Warnung A_1 und der Parade B_1, das ist eine interne Eigenschaft unserer Intelligenz; aber warum besteht diese Verbindung? Weil die Parade B_1 tatsächlich gestattet, sich gegen die Gefahr A_1 zu verteidigen; das ist eine Tatsache, die außerhalb unserer selbst liegt, das ist eine Eigenschaft der Außenwelt. Unser Bild der Verteilung ist also nichts anderes als die Übersetzung einer Gesamtheit von Tatsachen, die außerhalb von uns selbst stehen; es gibt drei Dimensionen, weil das zu einer Welt paßt, die gewisse Eigenschaften hat; das Hauptsächliche an diesen Eigenschaften

ist, daß in dieser Welt natürliche feste Körper existieren, deren Bewegungen wesentlich gemäß den Gesetzen vor sich gehen, die wir die Gesetze von der Bewegung der unveränderlichen Körper nennen. Wenn also die Sprache der drei Dimensionen diejenige ist, welche uns gestattet auf die leichteste Art unsere Welt zu beschreiben, so dürfen wir uns darüber nicht weiter wundern; diese Sprache ist unserem Bilde der Verteilung genau angepaßt; kurz, wir können in dieser Welt nur leben, wenn dieses Bild in uns feststeht.

Ich sagte vorhin, daß wir begreifen könnten, daß in unserer Welt denkende Wesen leben, deren Bild der Verteilung vierdimensional wäre, und die folglich in einem Über-Raume denken würden. Es ist aber nicht ganz sicher, ob solche Wesen, die etwa in diesem Über-Raume entstehen, dort bestehen könnten und sich gegen die tausend Gefahren, denen sie ausgesetzt wären, verteidigen könnten.

VI.

Zum Schlusse möchte ich noch einige Bemerkungen hinzufügen. Es besteht ein auffallender Kontrast zwischen der Unbeholfenheit der primitiven Geometrie, welche auf das, was ich „das Bild der Verteilung" nenne, zurückzuführen ist, und der unendlichen Genauigkeit der mathematischen Geometrie. Und doch ist die letztere aus der ersteren hervorgegangen; aber nicht aus der primitiven Geometrie allein; sie mußte durch die Fähigkeit befruchtet werden, vermöge welcher wir mathematische Begriffe bilden, wie z. B. den Begriff der „Gruppe", man mußte unter den reinen Begriffen denjenigen auswählen, welcher am besten zu dem unbeholfenen Raume der primitiven Geometrie paßte, dessen Entstehungsgeschichte ich in den vorhergegangenen Seiten zu erklären suchte und den wir mit den höherstehenden Tieren gemein haben.

Wir sagten, daß die Evidenz gewisser geometrischer Postulate nichts anderes ist als unser Widerwille, sehr alten

Gewohnheiten zu entsagen. Diese Postulate sind unendlich genau, während die erwähnten Gewohnheiten im wesentlichen ziemlich verschwommen sind. Sobald wir denken wollen, brauchen wir notwendig unendlich genaue Postulate, weil sie das einzige Mittel sind, Widersprüche zu vermeiden; und unter all den Systemen von möglichen Postulaten gibt es solche, die wir nur mit Widerstreben wählen, weil sie nicht genügend mit unseren Gewohnheiten übereinstimmen; aber so nachgiebig und verschwommen die Gewohnheiten auch sind, so haben sie doch eine Grenze ihrer Elastizität.

Man sieht, daß, wenn die Geometrie keine Experimentalwissenschaft ist, sie doch eine im Zusammenhange mit der Erfahrung entstandene Wissenschaft ist; daß wir den Raum, den diese Wissenschaft studiert hat, erschaffen haben, indem wir den Raum der Welt, in der wir leben, anpaßten. Wir wählten den Raum, der uns am bequemsten schien, aber die Erfahrung war es, die unsere Wahl leitete; da diese Wahl eine unbewußte war, so scheint uns, dieselbe wäre uns aufgezwungen; die einen behaupten, daß die Erfahrung ihn uns aufzwingt, die anderen wiederum meinen, wir werden geboren mit unserem völlig fertigen Raume; nach den vorausgegangenen Betrachtungen sieht man sehr wohl, was an Wahrheit und was an Irrtum in jeder dieser beiden Meinungen steckt.

Was wird nun in dieser fortschreitenden Erziehung, die bis zur Konstruktion des Raumes ging, dem Individuum, und was der Rasse zuzuschreiben sein? Das ist sehr schwer zu entscheiden. Wenn jemand unter uns von seiner Geburt an in eine von der unsrigen völlig verschiedene Welt versetzt würde, wo z. B. Körper herrschen würden, deren Lage sich gemäß den Gesetzen der nicht-euklidischen festen Körper verändern würde, in welchem Umfange könnte dann dieser Jemand den von seinen Vorfahren übernommenen Raum aufgeben, um einen völlig neuen Raum aufzubauen?

Der Anteil, welcher der Rasse zukommt, scheint der ent-

scheidende zu sein; und doch, wenn wir der Rasse den unbeholfenen Raum zu verdanken haben, den ungenauen Raumbegriff, von dem ich soeben sprach, den Raum der höherstehenden Tiere, verdanken wir dann nicht der unbewußten Erfahrung des Individuums den unendlich genauen Raum des Mathematikers? Das ist eine schwer zu lösende Streitfrage. Wir wollen indessen eine Tatsache erwähnen, welche beweist, daß der Raum, den wir von unseren Vorfahren ererbt haben, eine gewisse Formbarkeit bewahrt. Gewisse Jäger verstehen es, Fische unter dem Wasser zu fangen, obgleich das Bild des Fisches infolge der Strahlenbrechung höher erscheint, als der Fisch sich in Wirklichkeit befindet. Die betreffenden Jäger handeln ganz instinktiv: sie haben also gelernt, ihren ererbten Richtungsinstinkt abzuändern, oder, anders gesagt: sie setzten an Stelle der Assoziation A_1, B_1 eine andere Assoziation A_1, B_2, weil die Erfahrung sie gelehrt hat, daß sie mit der ersteren Assoziation keinen Erfolg haben.

Zweites Kapitel.
Die mathematischen Definitionen und der Unterricht.

1. Ich muß hier von allgemeinen mathematischen Definitionen sprechen, wie es im Titel dieses Kapitels angegeben ist; es wird mir aber unmöglich sein, mich auf dieses Gebiet zu beschränken, obgleich das Gesetz von der Einheit der Handlung es verlangt; ich kann dieses Gebiet unmöglich behandeln, ohne einige andere naheliegende Fragen zu erwähnen, und wenn ich demgemäß genötigt bin, von Zeit zu Zeit in die Seitenwege zur Rechten oder zur Linken abzubiegen, so bitte ich im voraus, mir dieses zu verzeihen.

Was versteht man unter einer „guten Definition"? Der Philosoph oder Gelehrte versteht darunter eine Definition, welche sich auf alle definierten Gegenstände anwenden läßt, und nur auf diese; es ist die Definition, welche den Regeln

der Logik genügt. Im Unterrichte aber ist dem nicht so, da versteht man unter einer guten Definition diejenige, welche von den Schülern verstanden wird.

Wie kommt es nun, daß so viele Köpfe sich weigern, die Mathematik verstehen zu lernen? Liegt darin nicht etwas Paradoxes? Wir haben es mit einer Wissenschaft zu tun, welche sich ausschließlich auf die fundamentalen Prinzipien der Logik gründet, z. B. auf das Prinzip des Widerspruches; es handelt sich hier um eine Wissenschaft, die sozusagen das Skelett unseres Begriffsvermögens ausmacht, die das enthält, was man zum Denken so nötig hat, daß man aufhören würde zu denken, wenn man sich ihrer entäußern wollte — und doch gibt es Leute, welchen diese Wissenschaft dunkel vorkommt, und sie sind sogar in der Mehrzahl! Daß diese Leute unvermögend sind, selbständig etwas auszudenken, möge noch hingehen, aber daß sie die Beweise, welche man ihnen vorträgt, nicht verstehen, daß sie blind bleiben, wenn man ihnen ein Licht zeigt, das uns in reinem Glanze erstrahlt, das ist doch wirklich erstaunlich.

Und doch bedarf es nicht einmal einer großen Erfahrung in den Prüfungen, um zu wissen, daß diese Blinden keine Ausnahme bilden. Wir haben hier ein schwer zu lösendes Problem vor uns, aber dieses Problem sollte alle diejenigen beschäftigen, die sich dem Unterrichte widmen.

Was heißt das: „etwas verstehen“? Hat dieses Wort für alle denselben Sinn? Heißt es die Beweisführung eines Theorems verstehen, wenn man der Reihe nach jeden der Syllogismen prüft, mit denen die Beweisführung zu tun hat, und bestätigt, daß das Theorem richtig ist, wie man in analoger Weise bei den Spielregeln verfährt? Und weiter: heißt es eine Definition verstehen, wenn man nur erkennt, daß man den Sinn aller angewandten Worte bereits kennt und konstatiert, daß die Definition keinen Widerspruch enthält?

Für einige mag das zutreffen; wenn sie eine solche Konstatierung gemacht haben, werden sie sagen: Ich habe es

verstanden. Doch wird es nicht für die große Mehrzahl zutreffen. Fast alle sind viel anspruchsvoller; sie wollen nicht nur wissen, ob alle Syllogismen einer Beweisführung korrekt sind, sondern auch warum sie sich in diese Ordnung besser einfügen als in jene. Sobald ihnen diese Reihenfolge der Syllogismen durch Willkür entstanden zu sein scheint und nicht durch eine Intelligenz, die sich beständig des zu erreichenden Zieles bewußt ist, so meinen diese Leute, sie nicht verstehen zu können.

Sie sind sich zweifellos nicht klar darüber, was sie eigentlich verlangen; sie sind nicht imstande, ihre Wünsche klar auszudrücken; aber da sie diese Wünsche nicht befriedigt sehen, haben sie die unbestimmte Empfindung, daß irgend etwas nicht stimmt. Was folgt nun daraus? Anfänglich nehmen sie allerdings die Darlegungen noch in sich auf, die man ihnen vor Augen hält; aber da diese Darlegungen nur durch einen zu schwachen Faden mit dem verbunden sind, was vorangeht und was folgt, so geht alles an ihnen vorüber, ohne in ihrem Gehirne einen Eindruck zu hinterlassen; sie sind sogleich wieder vergessen; nach einem Momente der Beleuchtung fallen diese Darlegungen wieder in ewige Finsternis zurück. Wenn die Leute weiter vorgeschritten sind, so werden sie selbst dieses sehr vergängliche Licht nicht mehr gewahr, weil die Theoreme sich aufeinander beziehen und diejenigen, deren sie bedürfen, vergessen sind; auf solche Art werden sie unfähig, Mathematik zu verstehen.

Das ist nicht immer Schuld des den Unterricht leitenden Lehrers; oft haben seine Schüler wohl das Verlangen, den leitenden Faden zu bemerken, aber ihre Intelligenz ist zu träge, um diesen Faden selbst aufzusuchen und aufzufinden. Um nun den Schülern zu Hilfe zu kommen, müssen wir erst verstehen lernen, was sie am Verständnis hindert.

Andere stellen immer die Frage, wozu das alles nützen soll; sie haben nicht eher verstanden, als bis sie in ihrer

Umgebung, im täglichen Leben oder in der Natur die Daseinsberechtigung dieses oder jenes mathematischen Begriffes erkennen. Jedem Worte wollen sie ein greifbares Bild unterlegen; die Definition soll immer dieses Bild in ihnen wachrufen, bei jedem Stadium des Beweises wollen sie sehen, wie dieses Bild benutzt und verändert wird. Nur unter dieser Voraussetzung verstehen und behalten sie, was ihnen gelehrt und dargelegt wird. Sie geben sich sehr oft einer Selbsttäuschung hin; sie achten nicht auf die logische Entwicklung, sie betrachten nur ihre mathematischen Figuren und Zeichen, sie bilden sich ein, verstanden zu haben, während sie doch nur gesehen haben.

2. Wie verschiedenartige Bestrebungen machen sich hier geltend! Sollen wir sie bekämpfen oder sollen wir darauf eingehen? Welche von ihnen sollen wir begünstigen, wenn wir uns entschließen, die anderen zu bekämpfen? Müssen wir denen, die mit der reinen Logik zufrieden sind, klarmachen, daß sie nur eine Seite der Dinge gesehen haben? Oder sollen wir denen, die sich nicht so billigen Kaufes zufrieden geben, sagen, daß das, was sie wünschen, nicht notwendig ist?

Mit anderen Worten: sollen wir die jungen Leute zwingen. die Natur ihres Geistes umzuwandeln? Ein solcher Versuch wäre vergeblich; wir sind nicht im Besitze des Steines der Weisen, vermöge dessen wir die uns anvertrauten Metalle in einander verwandeln können; wir können nichts anderes tun, als uns bei ihrer Bearbeitung ihren Eigenschaften anpassen.

Viele Kinder sind gänzlich unfähig, Mathematiker zu werden, und doch muß man sie in der Mathematik unterrichten; und die Mathematiker selbst wurden nicht alle in einer Form gegossen. Man braucht nur ihre Werke zu lesen, um sofort zwei Klassen von schöpferischen Geistern zu unterscheiden: die rein logischen Forscher, wie Weierstraß z. B., und die intuitiven Forscher wie Riemann. Derselbe Unterschied

findet sich bei unseren Studenten: die einen ziehen es vor, ihre Probleme „analytisch“ zu behandeln, wie sie sagen, die anderen arbeiten lieber „geometrisch“.

Es wäre unnütz, daran etwas ändern zu wollen, und wäre eine solche Änderung überhaupt wünschenswert? Es ist gut, daß es zugleich logische Forscher und intuitive Forscher gibt; wer würde zu entscheiden wagen, ob er lieber sähe, daß Weierstraß niemals geschrieben hätte oder daß Riemann niemals gelebt hätte? Wir müssen uns also mit der Verschiedenartigkeit der Geister zufrieden geben, oder vielmehr, wir müssen uns darüber freuen.[30])

3. Da das Wort „verstehen“ verschiedentlich aufgefaßt werden kann, so sind die Definitionen, die von den einen am besten verstanden werden, nicht zugleich diejenigen, die für die anderen am besten passen. Wir haben einerseits Definitionen, die ein Bild in uns entstehen lassen, und andererseits solche, bei denen man sich darauf beschränkt, leere, scheinbar völlig unverständliche Formen zu kombinieren, die aber doch in höherem Sinne verständlich sind und von denen durch die Abstraktion alles Materielle abgestreift ist.

Ich weiß nicht, ob es noch nötig ist, Beispiele anzuführen. Ich will es jedoch versuchen; zunächst soll uns die Definition der Brüche ein extremes Beispiel geben. Um in den Elementarschulen einen Bruch zu definieren, zerschneidet man einen Apfel oder eine Torte, natürlich in Gedanken, aber nicht in Wirklichkeit, denn das Budget des Elementarunterrichtes würde eine solche Verschwendung wohl kaum gestatten. An den technischen Hochschulen dagegen oder an den Universitäten wird man sagen: ein Bruch ist ein System von zwei ganzen Zahlen, die durch einen horizontalen Strich voneinander getrennt sind; man wird durch Übereinkommen Rechnungsoperationen definieren, die man auf diese Zahlensymbole anwenden kann; man wird zeigen, daß für diese Operationen dieselben Regeln gelten wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen, und schließlich wird man beweisen, daß man

den Zähler findet, wenn man nach diesen Regeln den Bruch mit dem Nenner multipliziert. Diese Methode ist anwendbar, weil man sich an junge Leute wendet, die schon oft Äpfel oder andere Dinge zerlegt haben und infolgedessen mit dem Begriffe des Bruches schon seit langer Zeit vertraut sind, deren Geist durch eine starke mathematische Erziehung verfeinert ist und deshalb allmählich nach einer rein logischen Definition verlangt. Wie groß aber würde die Bestürzung eines Anfängers sein, wenn man ihm mit einer solchen Definition kommen wollte!

Derartige Definitionen findet man auch in einem mit Recht bewunderten und mehrfach preisgekrönten Buche: Die „Grundlagen der Geometrie" von Hilbert.[31]) Er beginnt mit folgendem Satze: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen, die wir Punkte, Gerade und Ebene nennen." Was sind nun diese „Dinge"? Wir wissen es nicht und wir brauchen es auch nicht zu wissen; es wäre sogar zu tadeln, wenn wir es zu wissen versuchten; alles, was wir berechtigt sind davon zu wissen, lehren uns die Axiome, z. B. das folgende: Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen immer eine Gerade, und hierzu gehört der folgende Kommentar: „Statt ‚bestimmen' werden wir auch sagen, daß die Gerade durch diese beiden Punkte geht, oder daß sie diese beiden Punkte verbindet, oder daß die beiden Punkte auf der Geraden liegen." Laut Definition ist hiernach „auf einer Geraden liegen" einfach gleichbedeutend mit „eine Gerade bestimmen". Das ist ein Buch, von dem ich sehr hoch denke, das ich aber niemals einem Gymnasiasten empfehlen würde. Ich könnte es ja tun, aber er würde mit der Lektüre nicht weit kommen.

Die von mir gewählten Beispiele sind extremer Natur und kein Lehrer wird daran denken, so weit zu gehen. Aber wird er sich nicht denselben Gefahren aussetzen, auch wenn er sich von derartigen Vorbildern fernhält?

Wir sind in einer Gymnasialklasse, der Lehrer diktiert: Der Kreis ist der Ort aller Punkte der Ebene, welche gleiche Entfernung von einem inneren Punkte, dem sogenannten Zentrum, haben. Der gute Schüler schreibt diesen Satz in sein Heft, der schlechte Schüler macht statt dessen Kritzeleien auf dem Papier; aber keiner von beiden hat den Sinn verstanden; da nimmt der Lehrer die Kreide und zeichnet einen Kreis auf die Wandtafel. „Ei," denken die Schüler, „warum hat er denn nicht gleich gesagt: der Kreis ist eine runde Figur; dann hätten wir es doch verstanden." Sicher ist der Lehrer mit seiner Definition im Recht. Die Definition der Schüler hätte keinen Wert gehabt, denn sie wäre für keinen Beweis brauchbar gewesen und sie hätte den Schüler nicht dazu gezwungen, seine Begriffe zu analysieren, woran er sich doch gewöhnen muß. Es muß ihm gezeigt werden, daß er nicht versteht, was er zu verstehen glaubt, er muß dahin gebracht werden, daß er sich über die Ungenauigkeit seiner primitiven Begriffe klar wird und daß er selbst nach Läuterung und Verfeinerung verlangt.

4. Ich werde auf diese Beispiele später zurückkommen; jetzt wollte ich nur die beiden einander entgegengesetzten Auffassungsweisen hervorheben, zwischen denen ein starker Gegensatz besteht. Die Geschichte der Wissenschaft erklärt uns diesen Gegensatz. Wenn wir ein vor fünfzig Jahren geschriebenes Buch lesen, so haben wir den Eindruck, daß die meisten der darin angewandten Schlußweisen der nötigen Strenge entbehren,

Damals setzte man voraus, daß eine stetige Funktion ihr Zeichen nicht ändern kann, ohne durch Null zu gehen, heute beweist man es. Damals setzte man voraus, daß die gewöhnlichen Rechnungsregeln auf die irrationalen Zahlen anwendbar seien; heute beweist man es. Damals setzte man noch manche andere Dinge voraus, manchmal auch solche, die nicht richtig waren.

Man verließ sich auf die Anschauung; aber die An-

schauung kann uns weder Strenge noch Gewißheit geben; das hat man mehr und mehr erkannt. Sie lehrt uns z. B. daß jede Kurve eine Tangente habe, d. h. daß jede stetige Funktion eine Derivierte habe, und das ist falsch; der Anschauung hat man deshalb immer weniger Beweiskraft zuerkennen können.[32])

Wie ist nun diese so notwendige Veränderung vor sich gegangen? Man mußte sich bald davon überzeugen, daß sich die nötige Strenge in die Beweise nicht einführen lasse, wenn man sie nicht vorher in die Definitionen einführte.

Die Gegenstände, mit denen sich die Mathematiker beschäftigen, waren lange schlecht definiert; man glaubte sie zu kennen, weil man sie sich mit den Sinnen oder mit der Einbildungskraft vorstellte, aber man hatte nur ein undeutliches Bild von denselben, nicht eine präzise Idee, die für Beweisführungen brauchbar gewesen wäre.

Hier mußten die Logiker einsetzen. Besonders gilt das für die irrationalen Zahlen.

Die unbestimmte Vorstellung von der Stetigkeit, die wir der Anschauung verdanken, wurde in ein kompliziertes System von Ungleichungen aufgelöst, die sich nur auf ganze Zahlen beziehen. Dadurch gelang es, alle jene Schwierigkeiten definitiv zu beseitigen, die unsere Vorfahren erschreckten, wenn sie die Grundlagen der Infinitesimalrechnung klarzulegen versuchten.

Heute haben wir in der Analysis nur noch mit ganzen Zahlen zu tun und mit endlichen oder unendlichen Systemen von ganzen Zahlen, die durch ein Netz von Gleichungen oder Ungleichungen miteinander verbunden sind.

Die Mathematik wurde, wie man sich ausdrückt, arithmetisiert.[33])

5. Hat jedoch die Mathematik diese absolute Strenge erreicht, ohne selbst Opfer zu bringen? Keineswegs; was sie an Strenge gewonnen hat, hat sie an Beziehung zur Wirklichkeit verloren. Nur indem sie sich von der Wirklichkeit

entfernte, konnte sie die vollkommene Reinheit erreichen. Ihr ganzes Gebiet, das früher von Hindernissen starrte, kann man heute ungehindert durchwandern, aber diese Hindernisse sind durchaus nicht verschwunden. Sie sind nur an die Grenzen des Gebietes gerückt, und man muß sie von neuem überwinden, wenn man diese Grenzen überschreiten und in das Reich der Anwendungen eindringen will.

Man besaß eine ungefähre Vorstellung von einem mathematischen Begriffe, die sich aus sehr verschiedenen Elementen zusammensetzte; diese Elemente waren teils a priori gegeben, teils aus mehr oder weniger verarbeiteten Erfahrungen abgeleitet; man glaubte durch Intuition die wichtigsten Eigenschaften jedes Begriffes zu kennen. Heute verwirft man die erfahrungsmäßigen Elemente vollständig und stützt sich nur auf die a priori gegebenen Elemente; eine Eigenschaft dient als Definition, und aus ihr werden alle anderen Eigenschaften durch strenge Schlußweisen abgeleitet. Das ist ja recht schön, aber es bleibt zu beweisen, daß jene Eigenschaft, die zur Definition geworden ist, den realen Objekten wirklich zukommt, die wir aus der Erfahrung kennen und von denen wir unsere frühere ungefähre Vorstellung intuitiv abgeleitet haben. Um das zu beweisen, muß man die Erfahrung zu Hilfe nehmen oder an die Intuition appellieren, und wenn wir den Beweis nicht führen könnten, so wären unsere Lehrsätze zwar vollkommen streng richtig, aber auch vollkommen unnütz.

Die Logik erzeugt mitunter monströse Gebilde. Seit einem halben Jahrhundert sehen wir eine Menge von bizarren Funktionen auftauchen, die sich förmlich anzustrengen scheinen den ehrbaren Funktionen möglichst wenig zu gleichen, welche zu irgend etwas gebraucht werden könnten. Sie haben keine Stetigkeit, oder sie sind zwar stetig, haben aber keine Derivierte usw. Vom logischen Gesichtspunkte aus müssen diese fremdartigen Funktionen sogar als die allgemeinsten angesehen werden, während diejenigen Funktionen, denen man

in den Anwendungen zufällig begegnet, nur noch als spezielle Fälle erscheinen. Den letzteren räumt man nur noch einen geringen Platz ein.

Wenn man früher eine neue Funktion erdachte, so geschah dies zu irgendeinem praktischen Zwecke; heute erdenkt man neue Funktionen ausschließlich zu dem Zwecke, die Fehler in den Schlußweisen unserer Vorfahren aufzudecken, und zu irgend etwas anderem wird man diese Funktionen niemals benutzen können.[34])

Wenn sich der Pädagoge von der Logik allein leiten ließe, so müßte er mit den allgemeinsten, d. h. mit den bizarrsten Funktionen beginnen. Demzufolge müßte er schon den Anfänger lehren, sich mit diesem Heere von Mißgeburten herumzuschlagen. „Wenn ihr es anders macht," so werden die Logiker sagen „könnt ihr die Strenge nur schrittweise erreichen."

6. Die Logiker könnten recht haben, aber wir dürfen uns nicht so billigen Kaufes mit der Wirklichkeit abfinden, und ich meine hier nicht nur die Wirklichkeit der sinnlichen Welt, die doch einen gewissen Wert hat, da neun Zehntel unserer Schüler von uns eben Waffen verlangen, um gegen diese Wirklichkeit zu kämpfen. Ich meine eine weit feinere Wirklichkeit, welche das Leben der mathematischen Gebilde ausmacht und welche von ganz anderer als logischer Natur ist.

Unser Körper ist aus Zellen aufgebaut und die Zellen aus Atomen; bilden diese Zellen und Atome die ganze Wirklichkeit des menschlichen Körpers? Ist nicht die Art der Gruppierung dieser Zellen, durch welche die Einheit des Individuums bedingt wird, auch eine Wirklichkeit, und noch dazu eine viel interessantere?

Kann ein Naturforscher, der den Elefanten immer nur unter dem Mikroskope studiert, dieses Tier jemals vollkommen kennen lernen?

Ebenso verhält es sich mit der Mathematik. Wenn der Logiker jeden Beweis in eine Menge von elementaren Ope-

rationen, die alle korrekt sind, zerlegt hat, so beherrscht er deshalb noch nicht die ganze Wirklichkeit des zu beweisenden Lehrsatzes; jenes gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, wird ihm vollständig entgehen.

Weshalb sollen wir bei den von unseren Vorfahren aufgeführten Bauten die Arbeit des Maurers bewundern, wenn wir den Plan des Architekten nicht verstehen können? Diese Gesamtübersicht kann uns die reine Logik niemals geben, nur von der Intuition können wir sie mit Erfolg verlangen.

Nehmen wir als Beispiel den Begriff der stetigen Funktionen. Zuerst hat man es nur mit einem sinnlichen Bilde zu tun, mit einem Kreidestriche auf der Wandtafel; allmählich wird die Vorstellung verfeinert; man geht zur Konstruktion eines komplizierten Systems von Ungleichheiten über, welches den wesentlichen Inhalt des ursprünglichen Bildes wiedergibt; ist man damit fertig, so bricht man das Gerüst ab, wie nach der Konstruktion eines Gewölbes; die durch das Gerüst gegebene ungefähre Darstellung ist als Stütze überflüssig geworden und verschwindet; es bleibt nur das fertige Bauwerk, dem in den Augen des Logikers kein Fehler anhaftet. Wenn jedoch der Lehrer den Schüler nicht an das ursprüngliche Bild erinnert, und nicht wenigstens vorübergehend das Gerüst wieder vor Augen führt, wie sollte dann der Schüler erraten, aus welchem Grunde alle diese Ungleichheiten aneinander gereiht und aufeinander aufgebaut sind? Die Definition wäre zwar logisch korrekt, aber sie würde die wahre Wirklichkeit nicht erkennen lassen.

7. Wir müssen also in die Vergangenheit zurückgreifen; für den Lehrer ist es sicher eine harte Aufgabe vorzutragen, was ihn selbst nicht ganz befriedigt; aber die Befriedigung des Lehrers ist nicht der einzige Zweck des Unterrichts; vor allem muß er sich darüber klar sein, wie er das geistige Vermögen des Schülers ausbilden soll.

Die Zoologen behaupten, daß die embryonale Entwicklung eines Tieres in sehr kurzer Zeit die ganze Geschichte seiner

Vorfahren in den geologischen Epochen durchmacht. Ebenso scheint es mit der Entwicklung des menschlichen Geistes zu sein. Der Erzieher muß das Kind durch alle Phasen führen, die seine Vorfahren durchgemacht haben, bedeutend schneller, aber ohne eine Etappe hinter sich zu verbrennen. In diesem Sinne muß die Geschichte der Wissenschaft unser vornehmster Führer sein.

Unsere Vorfahren glaubten zu wissen, was ein Bruch ist, was die Stetigkeit, was der Flächeninhalt einer krummen Oberfläche ist; wir dagegen haben die Entdeckung gemacht, daß sie es nicht wußten.[35]) Ebenso glauben unsere Schüler beim Beginne ernsthafter mathematischer Studien zu wissen, was jene Worte bedeuten. Wenn man ihnen nun ohne jede weitere Vorbedeutung sagt: „Nein, ihr wißt es nicht; was ihr zu verstehen glaubt, versteht ihr in Wirklichkeit nicht; euch muß erst gezeigt und erklärt werden, was euch selbstverständlich erscheint": wenn man so zu den Schülern spricht und wenn man sich in den weiteren Darlegungen auf Voraussetzungen stützt, die ihnen weniger evident erscheinen als das zu Beweisende, was werden diese Bedauernswerten dann denken? Sie werden denken, daß die mathematische Wissenschaft nur eine willkürliche Anhäufung von unnützen Subtilitäten ist; entweder werden sie jede Lust an dieser Wissenschaft verlieren, oder sie werden sich mit ihr beschäftigen wie mit einem Spiele und dadurch in einen Geisteszustand geraten, analog demjenigen der griechischen Sophisten.

Später dagegen, wenn der Geist des Schülers mit den mathematischen Schlußweisen schon vertraut und durch lange Übung gereift ist, werden die Zweifel von selbst kommen, und dann wird eine genauere Darlegung der Grundbegriffe willkommen sein. Diese Darlegung wird neue Zweifel erwecken, und so wird sich der Schüler allmählich Fragen stellen, wie sich auch unsere Vorfahren allmählich immer neue Fragen aufgeworfen haben, bis schließlich die vollkommene Strenge allein befriedigen kann. Es genügt nicht,

an allem zu zweifeln, man muß auch wissen, weshalb man zweifelt.

8. Das Hauptziel des mathematischen Unterrichtes besteht darin, gewisse Eigenschaften des Geistes zu entwickeln, und unter diesen ist die Intuition nicht am wenigsten wertvoll. Durch sie bleibt die mathematische Welt mit der wirklichen Welt in Kontakt, und wenn die reine Mathematik ihrer auch entbehren kann, so wird man doch immer auf sie zurückgreifen müssen, um den Abgrund auszufüllen, der das Symbol von der Wirklichkeit trennt. Der Praktiker wird diese Intuition stets nötig haben, und auf einen reinen Mathematiker kommen hundert Praktiker.

Der Ingenieur muß eine vollkommene mathematische Erziehung erhalten; wozu aber soll sie ihm dienen? Um die verschiedenen Erscheinungsformen der Dinge zu sehen und um sie schnell zu sehen; er hat nicht Zeit sich mit Kleinigkeiten abzugeben. Bei den komplizierten physikalischen Dingen, mit denen er zu tun hat, muß er schnell erkennen, an welchem Punkte die mathematischen Hilfsmittel einsetzen können, die wir ihm in die Hand gegeben haben. Wie sollte er das können, wenn wir den tiefen Abgrund bestehen lassen, der bei der rein logischen Behandlung zwischen Theorie und Praxis gähnt?

9. Neben den künftigen Ingenieuren gibt es weniger zahlreiche andere Schüler, die Lehrer zu werden beabsichtigen; diese müssen den Dingen auf den Grund gehen; eine vertiefte und strenge Kenntnis der ersten Prinzipien ist für sie unerläßlich. Aber das darf für sie kein Grund sein, die Intuition zu vernachlässigen, denn sie würden sich eine falsche Vorstellung von der Wissenschaft machen, wenn sie dieselbe immer nur von einer Seite betrachten, und überdies könnten sie bei ihren Schülern nicht eine Eigenschaft entwickeln, die sie selbst nicht besitzen.

Für den reinen Mathematiker ist diese Eigenschaft notwendig: die Logik braucht man zur Beweisführung, die Intuition zur Erfindung. Kritisieren verstehen ist gut, verstehen

etwas Neues zu schaffen ist besser. Die Logik lehrt uns erkennen, ob eine Kombination korrekt ist; aber wozu nützt das, wenn wir nicht die Kunst besitzen, zwischen allen möglichen Kombinationen die richtige zu wählen. Die Logik lehrt uns, daß wir auf diesem oder jenem Wege sicher keinen Hindernissen begegnen werden, sie sagt uns nicht, welcher Weg zum Ziele führt. Um dahin zu gelangen, muß man das Ziel von weitem sehen, und die Intuition ist eben die Fähigkeit, welche uns das Sehen lehrt. Ohne sie würde es dem Mathematiker ergehen wie einem Schriftsteller, der in der Grammatik vollkommen bewandert ist, aber keine Ideen hat. Wie soll sich diese Fähigkeit entwickeln können, wenn man sie verfolgt und unterdrückt, sobald sie sich geltend machen will, wenn man den Schüler lehrt ihr zu mißtrauen, ehe er gelernt hat, welche Vorteile sie bietet. Es sei mir gestattet, hier eine kurze Abschweifung zu machen, um die Wichtigkeit schriftlicher Arbeit hervorzuheben. Den schriftlichen Aufgaben wird bei gewissen Prüfungen nicht genug Wert beigelegt, wenigstens nicht an der École politechnique. Wie man sagt, würden die schriftlichen Arbeiten dazu führen. daß vortreffliche Schüler ausgeschlossen würden, die ihr Pensum sehr gut wissen, die alles sehr gut verstehen, die aber unfähig sind, von ihrem Wissen die geringste Anwendung zu machen. Das Wort „verstehen" hat, wie ich vorhin ausführte (S. 104 f.) eine mehrfache Bedeutung: die hier gemeinten Schüler verstehen nur in dem zuerst erwähnten Sinne, und wir haben soeben gesehen, daß dies weder zur Ausbildung eines Ingenieurs noch zur Ausbildung eines Mathematikers hinreicht. Wenn durch das Examen eine Auswahl getroffen werden soll, so würde ich lieber diejenigen auswählen, welche in beiderlei Sinne zu verstehen gelernt haben.

10. Ist die Kunst logisch richtig zu schlußfolgern nicht schon an sich von höchstem Werte, und sollte nicht deshalb der Mathematiklehrer sie ganz besonders pflegen? Ich werde mich hüten, dies zu leugnen: der Lehrer soll sich mit dieser

Kunst beschäftigen, und zwar gleich von Anfang an. Ich müßte es außerordentlich bedauern, wenn die Geometrie in eine Art von Schnellmeßkunde niedrigen Ranges ausarten sollte, und ich unterschreibe keineswegs die extremen Ansichten, die von manchen deutschen Gymnasiallehrern vertreten werden. In denjenigen Gebieten der Mathematik, in denen die von mir bezeichneten Schwierigkeiten nicht auftreten, hat man hinreichend Gelegenheit, die Schüler im korrekten Schlußfolgern zu üben. Es gibt lange Ketten von geometrischen Sätzen, in denen die absolute Logik von jeher und sozusagen naturgemäß herrschte, in denen schon die ersten Geometer uns Vorbilder gegeben haben, welche man stets nachahmen und bewundern muß.[36])

Bei der ersten Darlegung der Grundprinzipien aber muß man Subtilitäten vermeiden; diese würden eher abschreckend wirken und überdies überflüssig sein. Man kann nicht alles beweisen und man kann nicht alles definieren; man wird sich doch immer wieder auf die Intuition berufen müssen; es kommt nicht darauf an, ob man dies etwas früher oder später tut, oder ob man sich etwas mehr oder weniger auf die Intuition beruft, wenn wir nur lernen, uns der von ihr gegebenen Voraussetzungen richtig zu bedienen und auf Grund derselben richtig zu schlußfolgern.

11. Ist es möglich so viele widersprechende Forderungen gleichzeitig zu erfüllen? Ist dies insbesondere möglich, wenn es sich darum handelt, eine Definition zu geben? Wie soll man für dieselbe eine strenge und kurze Ausdrucksform finden, die gleichzeitig den unabänderlichen Regeln der Logik genügt und unserem Wunsche, den Platz des neuen Begriffes in der Gesamtheit der Wissenschaft zu verstehen, sowie unserem Bedürfnisse, mit Hilfe von Anschauungsmitteln zu denken? In den meisten Fällen wird man eine solche Ausdrucksform nicht finden, und deshalb genügt es nicht, eine Definition auszusprechen: man muß sie auch vorbereiten und rechtfertigen.

Was soll damit gesagt sein? Bekanntlich sagt man oft: jede Definition enthält ein Axiom, denn sie behauptet die Existenz des definierten Objektes. Die Definition ist daher im Sinne der reinen Logik nur dann gerechtfertigt, wenn man bewiesen hat, daß sie weder in den gebrauchten Worten noch in Beziehung zu den anderweitig vorausgesetzten Wahrheiten einen Widerspruch nach sich zieht.

Das genügt aber noch nicht. Die Definition wird uns als ein allgemein getroffenes Übereinkommen vorgelegt; die meisten Denker werden sich jedoch dagegen wehren, wenn man ihnen eine Definition als ein willkürliches Übereinkommen aufzwingen will. Sie werden sich erst beruhigen, wenn ihnen auf ihre zahlreichen Fragen die nötigen erläuternden Antworten gegeben sind.

Wie von Liard gezeigt wurde, sind die mathematischen Definitionen meistens förmliche Gebäude, die sich in allen ihren Teilen aus einfacheren Begriffen zusammensetzen. Weshalb aber wurden diese einfachen Elemente gerade in dieser Weise zusammengefügt, während es tausend andere Möglichkeiten für die Art ihrer Zusammenfügung gab? Geschah dies nur aus Laune? Wenn nicht, weshalb hatte dann diese Zusammensetzung mehr Existenzberechtigung als alle anderen? Welchem Bedürfnisse wurde durch sie genügt? Wie konnte man voraussehen, daß ihr in der Entwicklung der Wissenschaft eine wichtige Rolle zukommen werde, daß sie unsere Schlußfolgerungen und Rechnungen abkürzen werde? Gibt es vielleicht in der Natur irgendeinen uns vertrauten Gegenstand, der sozusagen ein undeutliches und ungenaues Bild des definierten Begriffes ist?

Wenn man nun alle diese Fragen befriedigend beantwortet hat, so muß das Kind auch einen Namen haben und die Wahl dieses Namens muß wohl überlegt werden; man muß auseinandersetzen, durch welche Analogien man sich leiten ließ, und daß andere Dinge, denen man schon analoge Namen gegeben hatte, sich von dem jetzt zu benennen-

den nur durch den Inhalt unterscheiden, ihm aber in der Form nahe kommen, daß ihre Eigenschaften analog sind und gleichsam parallel laufen.

Auf diese Weise kann man alle Forderungen befriedigen. Wenn die Ausdrucksform hinreichend korrekt ist, um dem Logiker zu gefallen, so wird die gegebene Rechtfertigung den intuitiven Denker befriedigen. Noch besser ist es, wenn man dafür sorgt, daß die Rechtfertigung dem Aussprechen der Definition vorangeht und sie vorbereitet, wo dies nur irgend angeht; durch das Studium einiger besonderer Beispiele soll man zum Aussprechen der allgemeinen Definition geführt werden.

Außerdem ist noch folgendes zu beachten: jeder einzelne Teil in dem Ausspruche einer Definition bezweckt, den zu definierenden Gegenstand von einer Klasse anderer benachbarter Gegenstände zu trennen. Die Definition ist nur verständlich, wenn man nicht nur den definierten Gegenstand bezeichnet, sondern auch die benachbarten Gegenstände, von denen jener unterschieden werden soll, und wenn man den Unterschied hervortreten läßt und zu dem Zwecke ausdrücklich hinzufügt: aus dem und dem Grunde habe ich beim Ausspruche der Definition dieses oder jenes Wort gebraucht.

Es ist nun wohl Zeit, die allgemeinen Darlegungen zu verlassen und zu prüfen, wie die von mir besprochenen, etwas abstrakten Prinzipien in der Arithmetik, in der Geometrie, in der Analysis und in der Mechanik angewandt werden können.

Arithmetik.

12. Die ganze Zahl braucht man nicht zu definieren; in der Regel definiert man indessen die Operationen mit den ganzen Zahlen; ich glaube, daß die Schüler diese Definitionen auswendig lernen, ohne damit irgendeinen Sinn zu verbinden, und zwar aus zwei Gründen: erstens läßt man sie diese Definitionen zu früh lernen, zu einer Zeit, wo ihr Verstand

noch gar kein Bedürfnis danach hat; zweitens sind diese Definitionen in logischer Beziehung nicht befriedigend. Für die Addition kann man keine gute Definition finden, einfach, weil man sich beschränken muß und nicht alles definieren kann. Wenn man sagt: die Addition besteht im Hinzuzählen, so ist das keine Definition. Man kann nichts anderes tun, als von einer gewissen Anzahl von konkreten Beispielen ausgehen und sodann sagen: die von uns hier ausgeführte Operation nennt man Addition.

Anders ist es mit der Subtraktion; man kann sie logisch richtig definieren als die umgekehrte Operation der Addition; aber darf man damit beginnen? Auch hier sollte man zu Anfang nur Beispiele vorführen und an diesen Beispielen die gegenseitige Beziehung der beiden Operationen erläutern; dadurch wird die Definition vorbereitet und gerechtfertigt.

Ebenso sollte man bei der Multiplikation verfahren; man nimmt ein besonderes Problem vor; man zeigt, daß es zu lösen ist, indem man mehrere einander gleiche Zahlen addiert; man weist sodann darauf hin, daß man durch eine Multiplikation schneller zum Ziele gelangt, d. h. durch eine Operation, die den Schülern praktisch schon geläufig ist; schließlich ergibt sich so die logische Definition ganz von selbst.

Die Division definiert man als Umkehrung der Multiplikation; man wird wieder mit einem Beispiele beginnen, das an den bekannten Begriff der Teilung anknüpft, und man wird daran zeigen, daß durch Multiplikation der Dividend zurückerhalten wird.

Es bleiben noch die Rechnungsoperationen mit Brüchen zu besprechen. Eine Schwierigkeit entsteht hier nur bei der Multiplikation. Am besten ist es, die Theorie der Proportionen vorauszuschicken; aus ihr allein kann eine logische Definition abgeleitet werden; um aber die Definitionen annehmbar zu machen, die man zu Beginn dieser Theorie gewöhnlich gibt, muß man sie durch zahlreiche Beispiele vor-

bereiten, die den klassischen Aufgaben der Regeldetri entlehnt sind und bei denen man es so einrichtet, daß Brüche vorkommen. Man wird auch nicht davor zurückschrecken, die Schüler durch geometrische Bilder mit dem Begriffe der Proportion vertraut zu machen, sei es, daß man sie an ihre geometrischen Kenntnisse erinnert, falls sie schon Geometrie getrieben haben, oder daß man die direkte Anschauung zu Hilfe nimmt, falls sie noch nichts von Geometrie wissen; dadurch bereitet man sie gleichzeitig zu den späteren geometrischen Studien vor. Hat man so die Multiplikation der Brüche definiert, so muß man schließlich diese Definition noch rechtfertigen, indem man zeigt, daß sie den kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetzen genügt, und dabei nicht unterläßt, den Hörern zu bemerken, daß man dies zu dem Zwecke konstatiert, um die Definition zu rechtfertigen.

Wie man sieht, spielen geometrische Bilder hierbei eine wichtige Rolle; und diese Rolle wird sowohl durch die Philosophie als auch durch die Geschichte der Wissenschaft gerechtfertigt. Wenn die Arithmetik von jeder Verbindung mit der Geometrie freigeblieben wäre, so würde sie nur ganze Zahlen kennen; um sich den Bedürfnissen der Geometrie anzupassen, mußte sie auch andere Dinge einführen.

Geometrie.

Zu Beginn der geometrischen Studien begegnen wir dem Begriffe der geraden Linie. Kann man eine gerade Linie definieren? Die bekannte Definition als kürzester Weg zwischen zwei Punkten kann ich nicht als befriedigend betrachten. Ich würde einfach vom Lineal ausgehen und dem Schüler zuerst zeigen, wie man die Genauigkeit des Lineals durch Umdrehung desselben um seine Kante prüfen kann; durch diese Prüfung ist die wahre Definition der Geraden gegeben: Die gerade Linie ist eine Rotationsachse.[87]) Weiterhin wird man dem Schüler klarmachen, wie die Genauig-

keit des Lineals auch durch Gleitung (durch Verschiebung desselben in sich oder längs einem zweiten Lineale) geprüft werden kann, und damit hätte man eine der wichtigsten Eigenschaften der geraden Linie gewonnen. Jene andere Eigenschaft, die darin besteht, daß sie den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten darstellt, ist ein Lehrsatz, der sich exakt beweisen läßt, aber dieser Beweis ist zu schwierig, um in den Gymnasialunterricht aufgenommen werden zu können. Für denselben genügt es, wenn ein vorher geprüftes Lineal an einen gespannten Faden angelegt und dadurch der erwähnte Lehrsatz verdeutlicht wird. Derartigen Schwierigkeiten gegenüber darf man nicht davor zurückschrecken, die Anzahl der Axiome zu vermehren, wenn man sie auch nur durch ziemlich rohe Experimente rechtfertigen kann.

Solche Axiome hat man immer nötig, und wenn man einige mehr einführt, als genau genommen erforderlich wäre, so ist das kein großes Unglück; wesentlich dagegen ist, daß man lernt, auf Grund der einmal eingeführten Axiome richtige Schlüsse zu ziehen. Onkel Sarcey, der sich gern wiederholte, sagte oft: Im Theater nimmt der Zuschauer alles willig hin, was bei Beginn des Spieles von ihm verlangt wird, bei der weiteren Entwicklung des Spieles aber besteht er unerbittlich auf der Logik.[38]) Ebenso ist es mit der Mathematik.

Um den Kreis zu definieren, kann man von dem Zirkel ausgehen, den der Schüler aus dem Reißzeuge kennt; er ist sofort mit der bezeichneten Kurve vertraut; man muß ihn sodann darauf aufmerksam machen, daß die gegenseitige Entfernung der beiden Spitzen des Instrumentes beim Ziehen der Kurve unverändert bleibt und daß die eine dieser Spitzen fest bleibt, während sich die andere bewegt. Auf diese Weise wird man ganz von selbst zur logischen Definition des Kreises geführt.

Die Definition der Ebene enthält in sich ein Axiom, und das darf man nicht übergehen. Man nehme ein Zeichen-

brett und mache darauf aufmerksam, daß ein bewegliches Lineal sich beständig an dies Brett anlegt und zwar mit drei Freiheitsgraden. Zum Vergleiche ziehe man den Zylinder und den Kegel heran, Flächen, an welche man eine gerade Linie nur anlegen kann, wenn man ihr zwei Grade von Freiheit läßt;[39]) sodann nehme man drei Zeichenbretter; man zeige zunächst, daß je zwei aufeinander gleiten können, und zwar mit drei Freiheitsgraden; und um die Ebene von der Kugel zu unterscheiden, zeige man ferner, daß zwei dieser Bretter aufeinander gelegt werden können, wenn jedes von ihnen auf das dritte gelegt werden kann.

Über diese andauernde Verwendung von beweglichen Instrumenten wird man sich vielleicht wundern; es ist das aber nicht bloß ein rohes Hilfsmittel, sondern es hat einen viel tieferen philosophischen Sinn, als man zunächst glaubt. Was ist für den Philosophen Geometrie? Es ist das Studium einer Gruppe, und welcher Gruppe? Der Gruppe der Bewegungen der starren Körper.[40]) Wie könnte man diese Gruppe anders definieren, als indem man starre Körper sich tatsächlich bewegen läßt?

Dürfen wir die klassische Definition paralleler Linien beibehalten und sagen, daß man zwei gerade Linien so nennt, die sich in derselben Ebene befinden und sich niemals treffen, soweit man sie auch verlängert? Nein, denn diese Definition ist negativ, sie kann nicht durch die Erfahrung erprobt werden, sie ist uns also nicht durch die unmittelbare Anschauung gegeben. Vor allem aber müssen wir obige Frage verneinen, weil diese Definition dem Begriffe der Gruppe und der Betrachtung der Bewegung starrer Körper vollständig fremd ist, während doch diese Bewegung, wie ich soeben darlegte, die eigentliche Quelle der Geometrie ist. Es wäre besser, wenn man zuerst die geradlinige Translation einer unveränderlichen Figur als eine Bewegung definierte, bei der alle Punkte dieser Figur sich auf geraden Linien bewegen; man hätte dabei zu zeigen, daß eine der-

artige Bewegung möglich ist, etwa, indem man ein Dreieck an einem Lineal entlang gleiten läßt. Aus diesem Experimente hätte man ein Axiom abzuleiten, und es wäre dann leicht, den Begriff des Parallelismus einzuführen und das berühmte Euklidische Postulat aufzustellen.

Mechanik.

Auf die Definition der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der anderen kinematischen Begriffe brauche ich nicht zurückzukommen; man wird sie am besten mit dem Begriffe des Differentialquotienten in Verbindung bringen.

Auf die dynamischen Begriffe von Kraft und Masse will ich dagegen noch näher eingehen.

Es hat mich immer überrascht, wie viele junge Leute, die aus unseren Gymnasien hervorgehen, nicht darauf kommen, die mechanischen Gesetze, welche sie gelernt haben, auf die wirkliche Welt anzuwenden. Nicht etwa, weil sie dazu unfähig wären, sondern sie denken überhaupt nicht daran. Für sie ist die Welt der Wissenschaft von der wirklichen Welt durch eine undurchdringliche Zwischenwand getrennt. Nicht selten sieht man einen gutgekleideten jungen Mann, etwa einen Gymnasialabiturienten, in einem Wagen sitzen und sich offenbar einbilden, daß er zur Beschleunigung der Fahrt beiträgt, wenn er mit dem Oberkörper nach vorn zu stoßende Bewegungen macht, während dies doch im Widerspruche zu dem Prinzipe von Aktion und Reaktion steht.

Wir werden uns weniger darüber wundern, wenn wir versuchen, in die Gedanken unserer Schüler einzudringen; was ist für sie die eigentliche Definition der Kraft? Nicht diejenige, die man ihnen beigebracht hat, sondern eine andere, die in irgendeinem Winkel ihres Verständnisses versteckt liegt und von dort aus ihre Gedanken beherrscht, und zwar die folgende: die Kräfte sind Pfeile, mit denen man Parallelogramme zeichnet. Diese Pfeile sind eingebildete Wesen, die mit nichts etwas zu tun haben, das in der Natur exi-

stiert. Eine derartig falsche Vorstellung könnte nicht entstehen, wenn man den Schülern das Wirken der Kräfte in der Natur gezeigt hätte, ehe man dazu übergeht, sie durch Pfeile darzustellen.

Wie soll man nun die Kraft definieren? Eine gute logische Definition gibt es nicht, das habe ich bei anderer Gelegenheit hinreichend gezeigt. Es gibt die anthropomorphe Definition, die auf dem Muskelgefühle beruht, sie ist aber zu plump und für die Wissenschaft unbrauchbar.[41])

Beim Unterricht sollte man folgenden Weg einschlagen: um mit dem ganzen genus Kraft bekannt zu machen, sollte man die einzelnen Spezies dieses genus nacheinander vorführen; sie sind sehr zahlreich und voneinander sehr verschieden. Da gibt es den Druck der Flüssigkeiten auf die Wände des sie enthaltenden Gefäßes, die Spannung des Fadens, die Elastizität der Feder, die Schwere, welche auf alle Moleküle des Körpers wirkt, die Reibung, Druck und Gegendruck von zwei einander berührenden festen Körpern.

Dadurch gelangt man nur zu einer qualitativen Definition; man muß jetzt noch die Kraft messen lernen. Zu dem Zwecke zeigt man zunächst, daß man eine Kraft durch eine andere ersetzen kann, ohne das Gleichgewicht zu stören; das erste Beispiel für eine solche Substitution sehen wir in der Wage und in dem Doppelhebel von Borda. Sodann zeigt man, daß man ein Gewicht nicht nur durch ein anderes Gewicht ersetzen kann, sondern auch durch Kräfte verschiedener Natur: das Brems-Dynamometer von Prony gestattet z. B., ein Gewicht durch eine Reibung zu ersetzen.

Auf diese Weise gelangt man zu dem Begriffe der Äquivalenz zweier Kräfte.

Ferner muß man die Richtung einer Kraft definieren. Eine Kraft F sei einer andern Kraft F_1 äquivalent, die an dem betrachteten Körper durch Vermittlung eines gespannten Fadens angreift, so daß F ohne Störung des Gleichgewichtes durch F_1 ersetzt werden kann; dann ist der Punkt,

an welchen der Faden angeheftet ist, der Definition nach der Angriffspunkt der Kraft F_1 und somit auch der äquivalenten Kraft F; die Richtung des Fadens bezeichnet die Richtung der Kraft F_1 und zugleich der äquivalenten Kraft F.

Von hier kann man zur Vergleichung der Größe zweier Kräfte übergehen. Wenn eine Kraft zwei andere von gleicher Richtung ersetzen kann, so ist sie gleich ihrer Summe; man zeigt z. B., daß ein Gewicht von zwanzig Gramm zwei Gewichte von je zehn Gramm ersetzen kann. Aber das genügt noch nicht. Wir wissen jetzt, wie man die Intensität zweier Kräfte vergleicht, die gleiche Richtung und gleichen Angriffspunkt haben; wir müssen noch lernen, wie die Vergleichung geschieht, wenn die Richtungen verschieden sind. Zu dem Zwecke stellen wir uns einen, durch ein Gewicht gespannten Faden vor, der über einer Rolle läuft; wir sagen, daß die Spannung in den beiden Abteilungen des Fadens die gleiche ist und gleich dem spannenden Gewichte.

Das ist unsere Definition; sie gestattet uns, die Spannungen zweier Fäden zu vergleichen und unter Zuhilfenahme der anderen vorstehend gegebenen Definitionen irgend zwei Kräfte zu vergleichen, welche mit diesen beiden Fäden gleiche Richtung haben. Man muß dies begründen, indem man zeigt, daß die Spannung des letzten Fadenteils für ein und dasselbe spannende Gewicht immer die gleiche bleibt, wie man auch die Anzahl und die Verteilung der Rollen ändern mag, über die der Faden läuft. Als Ergänzung muß man ferner zeigen, daß dies nur richtig ist, wenn die Rollen keine Reibung haben.

Beherrscht man nun diese Definitionen, so muß man darauf hinweisen, daß Angriffspunkt, Richtung und Intensität genügen, um eine Kraft zu definieren, ferner daß zwei Kräfte, für welche diese drei Elemente übereinstimmen, immer äquivalent sind und immer durcheinander ersetzt werden können, sei es im Zustande des Gleichgewichtes, sei es im Zustande der Bewegung, und unabhängig von den etwa sonst noch wirkenden Kräften.

Man muß auch darauf hinweisen, daß zwei gegeneinander geneigte Kräfte immer durch eine Resultante ersetzt werden können, und daß diese Resultante dieselbe bleibt, einerlei ob der Körper ruht oder sich bewegt und unabhängig davon, ob noch andere Kräfte an ihm angreifen.

Man muß schließlich auch darauf hinweisen, daß die in der obigen Weise definierten Kräfte dem Prinzip der Aktion und Reaktion genügen.

Alles dies lernen wir durch das Experiment und können wir nur durch das Experiment lernen.

Es wird genügen, die Aufmerksamkeit der Schüler auf einige gewöhnliche Erfahrungen zu lenken, die sie täglich machen, ohne sich dessen bewußt zu werden, und vor ihnen eine kleine Anzahl einfacher und gut gewählter Experimente auszuführen.

Erst wenn man diese Umwege gemacht hat, kann man dazu übergehen, die Kräfte durch Pfeile darzustellen, und selbst bei der Entwicklung weiterer Schlußfolgerungen sollte man meiner Meinung nach hin und wieder vom Symbol zur Wirklichkeit zurückkehren. Es wäre z. B. nicht schwer, das Parallelogramm der Kräfte mittelst eines Apparates zu erläutern, der aus drei Fäden besteht, welche über Rollen laufen und durch Gewichte gespannt sind, wobei dann Gleichgewicht eintritt, wenn die Richtungen der Zugkräfte sich in einem Punkte treffen.[42])

Kennt man den Begriff „Kraft", so ist es leicht, die Masse zu definieren; diese Definition muß der Dynamik entnommen werden; anders kann man nicht verfahren, denn das zu erreichende Ziel ist, den Unterschied zwischen Masse und Gewicht verständlich zu machen. Auch hier muß die Definition durch Experimente vorbereitet werden; es gibt einen Apparat, der dazu wie geschaffen ist, den Begriff der Masse zu erläutern; das ist die Atwoodsche Fallmaschine; man kann außerdem an die Fallgesetze der Körper erinnern, nach denen die Beschleunigung der Schwere die gleiche ist für

schwere und für leichte Körper, und nach denen diese Beschleunigung mit der geographischen Breite variiert.

Wenn man mir entgegnet, daß alle die Methoden, deren Befolgung ich hier empfohlen habe, seit langer Zeit in den Gymnasien tatsächlich angewandt werden, so werde ich darüber sehr erfreut sein, mich aber nicht darüber wundern; ich weiß, daß der mathematische Unterricht in unseren Schulen im großen und ganzen gut ist; ich wünsche durchaus nicht, daß er plötzlich geändert wird, ich würde das sogar sehr bedauern, ich wünsche nur allmählich fortschreitende Verbesserung. Dieser Unterricht darf nicht plötzlichen Schwankungen unterworfen werden, die von den Launen vorübergehender Moden abhängen. Unter derartigen Stürmen würde sein hoher erzieherischer Wert zu leiden haben. Eine gute und solide Logik muß immer die Grundlage des Unterrichts bilden. Die Definition durch Beispiele ist immer notwendig, aber sie soll die logische Definition vorbereiten, nicht sie ersetzen; sie soll wenigstens das Verlangen nach der logischen Definition in denjenigen Fällen wachrufen, wo die wirkliche logische Definition mit Nutzen erst bei höheren Studien gegeben werden kann.

Man wird mir zugeben, daß das, was ich hier auseinandergesetzt habe, nicht im Widerspruch mit dem steht, was ich bei anderen Gelegenheiten geschrieben habe. Ich habe oft gewisse Definitionen kritisiert, die ich heute empfehle. Diese Kritik besteht unverändert, denn die Definitionen, auf welche sie sich bezieht, sind nur provisorischer Natur. Man muß mit ihnen beginnen, um zu tieferen Studien fortschreiten zu können.

Drittes Kapitel.

Mathematik und Logik.

Einleitung.

Kann die Mathematik auf die Logik zurückgeführt werden, ohne daß man die Prinzipien in Betracht zieht, die der

Mathematik eigen sind? Eine ganze Schule bemüht sich mit Eifer und Glauben an ihre gute Sache, eine solche Zurückführung durchzusetzen. Diese Schule hat ihre eigene Sprache, in welcher keine Wörter existieren und in der man nur Zeichen anwendet. Diese Sprache wird nur von einigen Eingeweihten verstanden, so daß der profanen Welt nur übrigbleibt, sich vor den entscheidenden Behauptungen der „Wissenden" dieser Schule zu beugen. Es ist aber wohl nicht nutzlos, diese Behauptungen einer näheren Prüfung zu unterziehen, um zu sehen, ob sie den entschiedenen Ton, mit dem sie aufgestellt werden, rechtfertigen.

Um das Wesen der eben aufgestellten Frage zu verstehen, ist es notwendig, auf einige historische Details näher einzugehen und insbesondere an den Charakter der Cantorschen Arbeiten zu erinnern.[43])

Seit langem ist der Begriff des Unendlichen in die Mathematik eingeführt; dieses „Unendlich" nennen die Philosophen „ein Werden". Das mathematische Unendlich ist eine Größe, die befähigt ist, über jede Grenze hinauszuwachsen; es ist eine veränderliche Größe, von der man nicht sagen kann, daß sie alle Grenzen überschritten hat, sondern nur, daß sie dieselben überschreiten könnte.

Cantor unternahm es, in die Mathematik das aktuelle Unendlich einzuführen, d. h. eine Größe, welche nicht nur fähig ist, alle Grenzen zu überschreiten, sondern dieselben bereits überschritten hat. Cantor stellt sich Fragen wie folgende: Gibt es im Raume mehr Punkte als ganze Zahlen? Gibt es mehr Punkte im Raume als in der Ebene? usw.

Dann bildet die Anzahl der ganzen Zahlen, diejenige der Punkte im Raume usw. das, was er eine transfinite Kardinalzahl nennt, eine Kardinalzahl, die viel größer als alle gewöhnlichen Kardinalzahlen ist. Cantor unternahm es ferner, diese transfiniten Kardinalzahlen miteinander zu vergleichen und, indem er die Elemente einer „Menge", welche unendlich viele dieser Elemente enthält, in angemessener Weise

anordnete, kam er auch zu dem Begriffe der von ihm als „transfinite Ordnungszahlen“ eingeführten Zahlen, auf die ich aber nicht weiter eingehen werde.

Zahlreiche Mathematiker folgten den Spuren Cantors und stellten sich eine Reihe von Fragen ähnlicher Art. Sie machten sich mit den transfiniten Zahlen dermaßen vertraut, daß sie so weit gingen, die Theorie der endlichen Zahlen von derjenigen der transfiniten Kardinalzahlen Cantors abhängig zu machen. Nach ihrer Meinung müßte man, um auf wahrhaft logische Weise Arithemik zu lehren, damit anfangen, die allgemeinen Eigenschaften der transfiniten Kardinalzahlen festzustellen und sodann unter ihnen eine ganz kleine Klasse unterscheiden, nämlich diejenige der gewöhnlichen ganzen Zahlen. Vermöge einer solchen Umkehrung könnte man dahin gelangen, alle Lehrsätze, die sich auf diese kleine Klasse beziehen, zu beweisen (d. h. unsere ganze Mathematik und unsere ganze Algebra), ohne sich irgendeines Prinzipes zu bedienen, das der Logik fremd wäre.

Es ist klar, daß diese Methode jeder gesunden Psychologie widerspricht; auf solchem Wege konnte der menschliche Geist nicht dazu gelangen, die Mathematik aufzubauen; auch glaube ich nicht, daß die Urheber dieser Methode daran denken, sie in den Gymnasialunterricht einzuführen. Aber ist diese Methode wenigstens logisch, oder, besser gesagt, ist sie richtig? Es sei mir erlaubt, daran zu zweifeln.

Die Mathematiker, welche diese Methode anwenden, sind jedoch sehr zahlreich; sie haben die Formeln übermäßig gehäuft und glaubten sich von allem, was nicht reine Logik war, zu befreien, indem sie Abhandlungen schrieben, in denen die Formeln nicht mehr mit dem erklärenden Texte abwechseln, wie in den Werken der gewöhnlichen Mathematik; sie ließen diesen erklärenden Text völlig verschwinden.

Unglücklicherweise erzielten sie widersprechende Resultate, die unter der Benennung Cantorsche Antinomien bekannt sind und auf welche wir noch gelegentlich zurück-

kommen werden. Diese Widersprüche wirkten aber nicht entmutigend auf die Vertreter der betreffenden Methode; letztere bemühten sich vielmehr, ihre Regeln so abzuändern, daß sie bereits aufgetauchte Widersprüche verschwinden ließen, ohne indessen sicher zu sein, ob sich nicht neue Widersprüche ergeben würden.

Es ist Zeit, mit diesen Übertreibungen abzurechnen. Ich hoffe nicht, ihrer Herr zu werden, denn ihre Vertreter haben zu lange in dieser Atmosphäre gelebt. Wenn man die Beweisführungen, welche die Anhänger der erwähnten Methode aufstellten, widerlegt, kann man sicher sein, dieselben Beweisführungen mit nichtssagenden Veränderungen wieder auftauchen zu sehen, und einige sind schon zu wiederholten Malen ihrer Asche entstiegen. Sie sind der von alter Zeit her bekannten Hydra ähnlich mit ihren berühmten Köpfen, die immer wieder nachwuchsen. Herkules hat sich glücklich aus der Affäre gezogen, weil seine Hydra nur neun oder elf Köpfe hatte; aber hier handelt es sich um zu viele, und zwar solche in England, Deutschland, Italien und Frankreich, und man muß das Spiel aufgeben. Ich kann darum nichts anderes tun, als mich an Leute mit gesundem Menschenverstand wenden, die nicht voreingenommen sind.

I.

Es sind in den letzten Jahren zahlreiche Arbeiten über reine Mathematik und mathematische Philosophie erschienen, um die logischen Elemente von der mathematischen Überlegung zu trennen und letztere zu isolieren. Diese Arbeiten wurden sehr klar analysiert und dargelegt von Couturat in seinem Buche: Les Principes des Mathématiques.[44])

Nach Couturat haben die neuen Arbeiten, besonders diejenigen von Russell und Peano endgültig den Streit, der zwischen der Leibnizschen und Kantschen Schule bestand, erledigt. Russell und Peano bewiesen, daß es kein synthetisches Urteil a priori gibt (so drückt sich Kant aus, um die

Urteile zu bezeichnen, die weder analytisch bewiesen werden können, noch auf die Identität zurückführbar sind und auch experimental nicht festgelegt werden können); sie stellten fest, daß die Mathematik vollkommen auf die Logik zurückführbar ist und daß die Intuition keine Rolle dabei spielt.

Das hat Couturat in dem eben erwähnten Werke entwickelt; er hat sich darüber noch ausdrücklicher in seiner Rede bei Anlaß des Kantschen Jubiläums geäußert, und das so gut, daß ich noch zu hören vermeine, wie mein Nachbar mir zuflüsterte: „Man merkt wohl, daß es sich um das Jubiläum von Kants Tode handelt.“

Können wir diesem entschiedenen Verdammungsurteile beipflichten? Ich glaube nicht, und ich will versuchen zu erklären, warum ich es nicht kann.

II.

Was uns vor allem bei der neuen Mathematik auffällt, ist ihr rein formaler Charakter; Hilbert sagt (vgl. oben S. 108): „Wir denken drei Arten von Dingen, welche wir Punkte, Gerade und Ebenen nennen wollen; wir setzen fest, daß eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt wird, und anstatt zu sagen, daß diese Gerade durch die zwei Punkte bestimmt wird, können wir sagen, daß sie durch diese zwei Punkte hindurchgeht oder daß diese zwei Punkte auf dieser Geraden liegen.“ Was sind nun eigentlich diese Dinge? Wir wissen nicht nur nichts von ihnen, sondern wir dürfen gar nicht versuchen, etwas davon zu wissen. Wir brauchen also nichts von ihnen zu wissen, und irgend jemand, der niemals einen Punkt, eine Gerade, eine Ebene gesehen hat, könnte ebenso in Geometrie arbeiten wie wir. Da die Ausdrücke hindurchgehen, oder darauf gelegen sein kein Bild in uns hervorrufen, so ist der erstere einfach dasselbe wie „bestimmt sein“ und der zweite dasselbe wie „bestimmen“.

Um ein Theorem zu beweisen ist es — man möge mich nicht mißverstehen — nicht notwendig, ja nicht einmal vorteilhaft, zu wissen, was es aussagen will. Man könnte den Mathematiker durch die Denkmaschine ersetzen, die Stanley Jevons sich ausgedacht hat; oder, um deutlicher zu sein, man könnte sich eine Maschine ausdenken, in die man die Axiome an einem Ende einführen würde, während die Theoreme am andern Ende herauskommen, wie bei der sagenhaften Maschine in Chikago, bei der die Schweine lebend eingeführt werden und als Schinken und Würstchen wieder zum Vorschein kommen. So wenig wie diese Maschine also braucht der Mathematiker zu wissen, was er vollbringt.

Aus diesem formalen Charakter seiner Geometrie will ich Hilbert keinen Vorwurf machen. So wie er sich das Problem stellte und wie er es anfaßte, mußte er zu dieser rein formalen Behandlung kommen! Er wollte die Zahl der fundamentalen Axiome auf ein Minimum zurückführen und eine vollständige Aufzählung derselben geben; oder anders gesagt: bei den Schlußfolgerungen, in denen unser Geist tätig ist, bei denen die Intuition sozusagen noch eine Rolle spielt, in den lebendigen Schlußfolgerungen, ist es schwer zu vermeiden, daß man ein Axiom oder ein Postulat unbewußt einführt, das dann unbemerkt bleibt. Nur nachdem man alle geometrischen Schlußfolgerungen auf eine rein mechanische Formel zurückgeführt hat, konnte Hilbert gewiß sein, seinen Zweck erreicht und sein Werk vollendet zu haben.

Das, was Hilbert in der Geometrie getan hat, wollten andere mit Arithmetik und Analysis machen. Wenn ihre Versuche vollständig gelungen wären, würden deshalb die Kantianer endgültig zum Schweigen verurteilt sein? Vielleicht doch nicht, denn wenn man den mathematischen Gedanken auf eine leere Formel zurückführt, wird er sicher verstümmelt. Wir wollen einmal zugeben, es sei bewiesen, daß alle Theoreme sich durch rein analytische Verfahren

ableiten lassen, und zwar durch einfache logische Kombinationen einer endlichen Anzahl von Axiomen, und daß diese Axiome nur auf Übereinkommen beruhen. Der Philosoph würde sich doch das Recht wahren, dem Ursprung dieser Axiome nachzuforschen und zu sehen, warum man sie den entgegengesetzten Voraussetzungen vorzieht.

Die logische Verbesserung der Schlußfolgerungen, welche von den Axiomen zu den Theoremen führen, ist es nicht allein, was uns beschäftigt. Machen denn die Regeln der absoluten Logik die ganze Mathematik aus? Man könnte ebenso gut behaupten, daß die ganze Kunst des Schachspielers sich auf die Regeln für die Schachzüge der einzelnen Figuren zurückführen läßt. Unter allen Konstruktionen, welche man mit dem von der Logik gelieferten Material aufbauen kann, muß man eine Wahl treffen; der rechte Mathematiker wird klug und richtig wählen, weil er durch einen sicheren Instinkt geleitet wird, oder durch das unbestimmte Bewußtsein von irgendeiner tieferen und verborgeneren Geometrie, die allein den Wert des aufgeführten Gebäudes bestimmt (vgl. oben S. 22).

Dem Ursprunge dieses Instinktes nachspüren, die sich fühlbar machenden, aber nicht ausdrucksfähigen Gesetze dieser tieferen Geometrie studieren wollen, das wäre eine schöne Aufgabe für jene Philosophen, die nicht einzig und allein der Logik alles zuschreiben wollen. Aber ich will nicht diesen Gesichtspunkt hervorheben, nicht hier diese Frage aufwerfen. Der Instinkt, von dem wir soeben sprachen, ist für den Forscher notwendig, aber auf den ersten Blick scheint es, als könnte man ihn entbehren, wenn man sich mit der schon fest gegründeten Wissenschaft beschäftigt. Meinetwegen; was ich aber erörtern möchte, ist folgendes: wenn man einmal die Prinzipien der Logik erfaßt hat, kann man dann alle mathematischen Wahrheiten — ich will nicht sagen entdecken — aber beweisen, ohne die Intuition zu Hilfe zu rufen?

III.

Vorstehende Frage habe ich früher mit „nein" beantwortet (siehe Wissenschaft und Hypothese, 1. Kapitel); muß unsere Antwort infolge der neuerdings entstandenen Arbeiten abgeändert werden? Wenn ich „nein" gesagt habe, so geschah es, weil mir das Prinzip der vollständigen Induktion zugleich als notwendig für den Mathematiker und als unreduzierbar für die Logik erschien. Man kennt den Inhalt dieses Prinzipes:

„Wenn eine Eigenschaft für die Zahl 1 richtig ist, und wenn man feststellt, daß sie auch für $n+1$ richtig ist, vorausgesetzt, daß sie es für n ist, so wird sie auch richtig für alle ganzen Zahlen sein." Darin sah ich den Kern der mathematischen Schlußweise. Ich wollte damit nicht sagen, wie man geglaubt hat, daß alle mathematischen Schlußweisen sich auf eine Anwendung dieses Prinzipes zurückführen lassen. Wenn man diese Schlußweisen etwas eingehender prüft, wird man darin viele andere, analoge Prinzipien angewandt sehen, welche die gleichen, wesentlichen Eigenschaften aufweisen. In dieser Kategorie von Prinzipien ist einzig die vollständige Induktion das einfachste Prinzip von allen, und nur deshalb habe ich sie früher als typisch bezeichnet.

Der Name: Prinzip der vollständigen Induktion, der allgemein gebraucht wird, ist nicht gerechtfertigt. Der Modus der Schlußweise ist doch nichts anderes als eine recht eigentliche mathematische Induktion, welche sich von der gewöhnlichen Induktion nur durch ihre Zuverlässigkeit unterscheidet.

IV.

Definitionen und Axiome.

Die Existenz derartiger Prinzipien bildet eine Schwierigkeit für die starren Logiker; wie ziehen sie sich aus dieser Affäre? Das Prinzip der vollständigen Induktion — so sagen sie — ist genau genommen kein Axiom und kein synthetisches Urteil a priori, es ist ganz einfach die Definition der

ganzen Zahl. Es ist also eine einfache Übereinkunft. Um über diese Anschauungsweise diskutieren zu können, müssen wir uns mit den Beziehungen zwischen Definitionen und Axiomen näher beschäftigen.

Wir wollen zunächst auf einen Artikel von Couturat über die mathematischen Definitionen verweisen, welcher in der bei Gauthier und Villars in Paris, und bei Georg in Genf erscheinenden Zeitschrift „L'Enseignement mathématique" veröffentlicht wurde. Wir finden darin eine Unterscheidung zwischen der direkten Definition und der Definition durch Postulate.

„Die Definition durch Postulate" — so sagt Couturat — „läßt sich nicht auf einen einzigen Begriff, sondern nur auf ein System von Begriffen anwenden; sie besteht darin, daß sie die fundamentalen Beziehungen aufzählt, welche die Begriffe verbinden und welche gestatten, alle ihre anderen Eigenschaften abzuleiten; diese Beziehungen sind Postulate . . . ."

Wenn man vorher alle Begriffe, einen ausgenommen, definiert hat, so wird dieser letztere durch Definition dasjenige Objekt, welches den Postulaten genügt.

Sonach würden gewisse unbeweisbare Axiome nichts anderes wie verkleidete Definitionen sein. Es ist oft sogar gerechtfertigt, diesen Gesichtspunkt geltend zu machen; ich selbst habe mir das z. B. bei dem Euklidschen Postulate erlaubt.[45])

Die anderen geometrischen Axiome genügen nicht, um die Entfernung völlig zu definieren; unter allen Größen, welche den anderen Axiomen genügen, wird die Entfernung laut Definition diejenige Größe sein, welche so beschaffen ist, daß sie dem Euklidschen Postulate genügt.

Die Logiker nehmen also für das Prinzip der vollständigen Induktion das an, was ich für das Euklidsche Postulat zulasse, und wollen auch in jenem Prinzipe nur eine verkleidete Definition sehen.

Dazu hat man aber nur das Recht, wenn man zuvor zwei Bedingungen erfüllt. Stuart Mill behauptete, daß in jeder Definition ein Axiom mit eingeschlossen ist, und zwar dasjenige, durch welches man die Existenz des definierten Objektes bestätigt. Demnach erschiene nicht mehr das Axiom als verkleidete Definition, sondern umgekehrt: die Definition würde ein verkleidetes Axiom sein. Stuart Mill faßte das Wort „Existenz“ in materiellem und empirischem Sinne auf; er wollte sagen: wenn man den Kreis definiert, so behauptet man damit zugleich, daß es Dinge in der Natur gibt, welche rund sind. In solcher Gestalt ist sein Ausspruch nicht statthaft. Die Mathematik ist unabhängig von der Existenz der materiellen Objekte; in der Mathematik kann das Wort: „existieren“ nur einen Sinn haben: es bedeutet „widerspruchslos sein“. Derart rektifiziert wird der Gedanke Stuart Mills exakt; indem man ein Objekt definiert, behauptet man gleichzeitig, daß die Definition keinen Widerspruch enthält.

Wenn wir also ein System von Postulaten haben, und wenn wir beweisen können, daß diese Postulate keinen Widerspruch enthalten, dann werden wir das Recht haben, diese Postulate als die Definition eines der Begriffe zu betrachten, die darin vorkommen. Wenn wir das nicht beweisen können, müssen wir es ohne Beweis voraussetzen, und dann würde ein Axiom daraus werden; und zwar derart, daß, wenn wir die Definition in dem Postulate suchen wollten, wir wiederum in der Definition das Postulat finden würden.

Der Beweis dafür, daß eine Definition keinen Widerspruch enthält, gelingt meistens durch Berufung auf ein Beispiel: man versucht das Beispiel eines Gegenstandes zu formulieren, welcher der Definition genügt. Nehmen wir den Fall einer Definition durch Postulate; wir wollen den Begriff *A* definieren und wir sagen, daß vermöge der Definition jedes Ding, für welches gewisse Postulate richtig sind, ein

A ist. Wenn wir direkt beweisen können, daß alle diese Postulate für ein gewisses Objekt *B* zutreffen, so wird die Definition gerechtfertigt sein; das Objekt *B* wird ein Beispiel für *A* sein. Wir werden gewiß sein, daß die Postulate einander nicht widersprechen, weil es Fälle gibt, in denen sie alle auf einmal zutreffen.

Aber ein solch direkter Beweis durch das Beispiel ist nicht immer möglich.

Um festzustellen, daß die Postulate keinen Widerspruch enthalten, muß man alle Lehrsätze näher betrachten, welche man aus diesen, als Prämissen betrachteten Postulaten ableiten kann, und zeigen, daß es unter diesen Lehrsätzen nicht zwei gibt, von denen einer einen Widerspruch gegen den andern enthielte. Wenn die Lehrsätze in endlicher Zahl vorhanden sind, ist eine direkte Verifikation möglich. Dieser Fall kommt selten vor und ist auch wenig interessant.

Wenn die Lehrsätze in unendlicher Zahl vorhanden sind, kann man diese direkte Verifikation nicht mehr machen; man muß solche Beweismethoden anwenden, bei denen man im allgemeinen gezwungen sein wird, gerade dasselbe Prinzip der vollständigen Induktion zu Hilfe zu nehmen, um dessen genauen Beweis es sich eben handelt.

Wir haben damit eine der Bedingungen erklärt, welchen die Logiker genügen sollten, und wir werden im folgenden erkennen, daß sie das nicht getan haben.

V.

Wir müssen noch eine zweite Bedingung in Betracht ziehen. Wenn wir eine Definition aufstellen, so geschieht es, um uns derselben zu bedienen.

Das einmal definierte Wort werden wir im Laufe der weiteren Entwicklung wiederholt anwenden. Haben wir das Recht, dem durch das Wort dargestellten Objekte stets die Eigenschaft beizulegen, die ihm nach dem zu seiner Defi-

nition dienenden Postulate zukommt? Gewiß, das ist völlig klar, vorausgesetzt, daß das Wort seinen Sinn bewahrt, und wir ihm nicht implicite einen andern Sinn unterlegen. Das letztere kommt manchmal vor, und es ist oft schwer, dies zu bemerken; man muß darauf achten, wie dieses Wort in unseren weiteren Entwicklungen eingeführt wurde, und ob die Türe, durch welche es sich einschlich, in Wirklichkeit nicht eine andere Definition mit hineinließ als diejenige war, die man ursprünglich aufgestellt hatte.

Diese Schwierigkeit besteht in allen mathematischen Anwendungen. Der mathematische Begriff ist von großer Klarheit und Schärfe; für den Mathematiker gibt es keinen Zweifel; wenn man aber den mathematischen Begriff z. B. auf die Physik anwenden will, so hat man es nicht mehr mit diesem reinen Begriff zu tun, sondern mit einem konkreten Objekte, das oft nur ein ein plumpes Abbild dieses Begriffes ist. Wenn man behauptet, daß ein solches Objekt der Definition — annähernd wenigstens — genügt, so spricht man damit eine neue Wahrheit aus, die nur durch Erfahrung sichergestellt werden könnte, und die nichts mehr von den Eigenschaften eines auf Übereinkommen beruhenden Postulates an sich hätte.

Aber auch innerhalb der reinen Mathematik trifft man auf dieselbe Schwierigkeit.

Hat man eine subtile Definition der „Zahl" aufgestellt, so wird man, wenn diese Definition einmal gegeben ist, nicht mehr an sie denken, denn tatsächlich ist nicht sie es, welche uns lehrte, um was es sich bei der Zahl handelt; das wußten wir ja schon seit langem; wenn nun das Wort „Zahl" uns weiterhin unter die Feder kommt, so wird man ihm den gleichen Sinn unterlegen wie im Anfang; um zu wissen, welcher Art dieser Sinn ist und ob er wohl der gleiche in diesem oder in jenem Satze ist, muß man beachten, wie man dazu kam, von der Zahl zu sprechen und dieses Wort in die beiden Sätze einzuführen. Für den Augenblick will ich

nicht näher hierauf eingehen, ich werde noch Gelegenheit finden, darauf zurückzukommen.

Wir haben so z. B. ein Wort, von dem wir explizite eine Definition A gaben; wir machen davon in der weiteren Entwicklung einen Gebrauch, welcher implizite eine andere Definition B voraussetzt. Es ist möglich, daß diese beiden Definitionen dasselbe Objekt bezeichnen. Aber wenn dem so ist, so handelt es sich um eine neue Wahrheit, die man als ein unabhängiges Axiom entweder beweisen oder voraussetzen müßte.

Wir werden weiterhin sehen, daß die Logiker die zweite Bedingung so wenig erfüllt haben wie die erste.

VI.

Die Definitionen der „Zahl“ sind sehr zahlreich und voneinander verschieden; ich verzichte darauf, auch nur die Namen ihrer Autoren aufzuzählen. Wir dürfen uns nicht darüber wundern, daß es so viele Definitionen gibt. Wenn eine unter ihnen genügte, so würde man nicht nötig haben, immer neue aufzustellen. Wenn jeder neue Philosoph, der sich mit dieser Frage beschäftigte, eine andere Definition erdenken zu müssen glaubte, so geschah es, weil ihm die Definitionen seiner Vorgänger nicht genügten, und sie genügten ihm nicht, weil er in ihnen eine petitio principii zu bemerken glaubte.

Beim Lesen der Schriften, die dieses Problem behandeln, konnte ich mich nicht eines tiefen Gefühls von Mißbehagen erwehren; ich erwartete beständig, mich an einer petitio principii zu stoßen, denn wenn ich diese nicht sogleich bemerkt hätte, so mußte ich befürchten, nicht aufmerksam genug gewesen zu sein.

Es ist unmöglich eine Definition zu geben, ohne sie in einem Satze auszusprechen, und es ist schwierig einen Satz auszusprechen, ohne daß darin ein Zahlwort, oder das Wort „mehrere“ oder mindestens ein Wort im Plural vorkommt.

Sowie das geschieht, kommt man in Gefahr auszugleiten und riskiert, in die petitio principii zu geraten.

Ich werde mich im folgenden nur mit denjenigen Definitionen befassen, in denen die petitio principii am geschicktesten verhüllt ist.

VII.

Die Pasigraphie.

Die von Peano erfundene symbolische Sprache spielt in den neueren Untersuchungen eine sehr große Rolle. Diese Sprache kann uns wohl einige Dienste leisten, aber Couturat erteilt ihr, wie mir scheint, eine so übertriebene Wichtigkeit, daß selbst Peano darüber erstaunt sein muß.

Das wesentliche Element dieser Sprache bilden gewisse algebraische Zeichen, welche die verschiedenen Konjunktionen darstellen: „wenn, und, oder, also". Es mag sein, daß diese Zeichen bequem sind; aber daß sie dazu dienen sollen, die ganze Philosophie zu erneuern, das ist eine andere Sache. Es fällt mir schwer zu glauben, daß das Wort „wenn" dadurch, daß man es „ɔ" schreibt, einen Vorzug gewinnt, den es nicht hat, wenn man es als „wenn" schreibt.

Diese Erfindung nennt Peano die Pasigraphie, d. h. die Art, eine mathematische Abhandlung zu schreiben, ohne daß darin ein Wort unserer gewöhnlichen Sprache vorkommt. Das Wort Pasigraphie bezeichnet sehr genau die Bedeutung dieser Schreibweise. Seitdem hat man sie zu einer höheren Würde erhoben, indem man ihr den Titel „Logistik" beilegte. Dieses Wort scheint mir der Kriegsschule entnommen zu sein; es bezeichnet dort als Logis-Lehre die Aufgabe des Quartiermeisters, die Kunst nämlich, die Truppen marschieren und ihre Quartiere beziehen zu lassen; doch ist hier keine Verwechslung zu befürchten, und man merkt sogleich, daß die neue Benennung den Plan zu einer gänzlichen Umgestaltung der Logik in sich birgt.

Diese neue Methode wendet Burali-Forti in einer mathematischen Abhandlung an, die unter dem Titel: „Una Questione sui numeri trasfiniti" veröffentlicht wurde und in dem XI. Bande der Rendiconti del circolo matematico di Palermo erschien.

Ich möchte gleich im voraus bemerken, daß ich diese Abhandlung für sehr interessant halte, und wenn ich sie hier als Beispiel anführe, so geschieht das einzig aus dem Grunde, weil sie die bedeutendste von allen in der neuen Schreibweise verfaßten Schriften ist. Übrigens können auch Uneingeweihte sie, vermöge einer italienischen Interlinear-Übersetzung, lesen.

Die Bedeutung dieser Abhandlung besteht vornehmlich darin, daß sie das erste Beispiel jener Antinomien anführt, welchen man beim Studium der transfiniten Zahlen begegnet, und welche seit einigen Jahren die Mathematiker zur Verzweiflung bringen. Burali-Forti sagt: Der Zweck meiner Arbeit ist, zu beweisen, daß es zwei transfinite Ordnungszahlen geben kann: a und b, so daß a und b weder einander gleich sein können, noch die eine größer oder kleiner als die andere sein kann.

Der Leser möge sich hierdurch nicht abschrecken lassen, er kann versichert sein, daß er, um die hier folgenden Betrachtungen zu verstehen, nicht zu wissen braucht, was eine transfinite Ordinalzahl ist.

Cantor hatte nun gerade genau bewiesen, daß zwischen zwei transfiniten Zahlen, wie auch zwischen zwei endlichen Zahlen, keine andere Beziehung als Gleichheit oder Ungleichheit in einem oder dem anderen Sinne besteht. Aber ich will nicht von dem tieferen Inhalte jener Abhandlung sprechen; das würde mich zu sehr von meinem Gegenstande ablenken; ich will mich nur mit der Form beschäftigen und mich nur fragen, ob diese Form ein Gewinn an mathematischer Strenge ist und dadurch die Mühe lohnt, welcher sich sowohl Verfasser als Leser unterziehen.

Zunächst sehen wir, wie Burali-Forti die Zahl 1 auf folgende Weise definiert:

$$1 = \iota T' \{ Ko \frown (u, h) \, \varepsilon (u \, \varepsilon \, Un) \};$$

das ist eine Definition, die sich ausgezeichnet dazu eignet, Personen, welche das Wort Eins noch nie gehört haben, einen Begriff von der Zahl 1 zu geben.

Die Ausdrucksweise Peanos verstehe ich zu wenig, um eine Kritik derselben zu wagen, aber ich fürchte, daß diese Definition eine petitio principii enthält, da ich 1 als Zahl auf der linken Seite und *Un* ausgeschrieben auf der rechten Seite der Gleichung sehe.

Wie dem auch sei, Burali-Forti geht nun einmal von dieser Definition aus, und nach einer kurzen Rechnung kommt er zu der Gleichung:

$$1 \, \varepsilon No,$$

die uns lehrt, daß 1 eine Zahl ist.

Da wir gerade bei diesen Definitionen der ersten Zahlen sind, wollen wir daran erinnern, wie Couturat 0 und 1 definierte.

Was bedeutet das Zeichen 0? Das ist die Anzahl von Elementen in der Nullklasse; und welches ist diese Nullklasse? Es ist diejenige, welche keine Elemente enthält.

Das Zeichen 0 durch das Wort Null, und dieses durch das Wort „kein" definieren, daß heißt den Reichtum unserer Sprache mißbrauchen: darum hat auch Couturat eine Vervollständigung seiner Definition gegeben, wenn er schreibt:

$$0 = \iota \Lambda : \varphi x = \Lambda \cdot \supset \cdot \Lambda = (x \, \varepsilon \, \varphi x),$$

was auf deutsch heißt: Null ist die Anzahl der Objekte, welche einer Bedingung genügen, die niemals erfüllt wird.

Aber da „niemals" gleichbedeutend ist mit „in keinem Falle", so sehe ich nicht ein, worin der Fortschritt bestehen sollte.

Ich beeile mich hinzuzufügen, daß die Definition, die Couturat von der Zahl 1 gibt, mehr befriedigt:

Eins — so drückt er sich im wesentlichen aus — ist die Zahl der Elemente einer Klasse, von deren Elementen je zwei miteinander identisch sind.

Ich sagte, daß diese Definition besser befriedigt, in dem Sinne, als hier das Wort Eins nicht gebraucht wird, um das Zeichen 1 zu definieren. Aber wenn man Couturat fragen würde, was das heißen soll „zwei“, wird er, fürchte ich, sich des Wortes Eins bedienen müssen.[46])

VIII.

Wir wollen auf die Abhandlung von Burali-Forti zurückkommen; ich sagte bereits, daß seine Folgerungen in direktem Gegensatze zu den Cantorschen stehen. Eines Tages besuchte mich Hadamard, und wir kamen auf die erwähnte Antinomie zu sprechen.

Ich sagte: „Erscheint Ihnen die Schlußweise von Burali-Forti einwandfrei?“

„Nein, ich kann im Gegenteil gegen die Cantorschen Schlußfolgerungen auch nichts einwenden. Übrigens hatte Burali-Forti nicht das Recht, von der Menge aller Ordinalzahlen zu sprechen.“

„Entschuldigen Sie, er hatte wohl das Recht, weil er immer:

$$\Omega = T'(No, \bar{\varepsilon} >)$$

setzen konnte.

Ich möchte wohl wissen, wer ihn daran hindern will; und kann man behaupten, ein Objekt existiere nicht, wenn man es mit Ω bezeichnet hat?“

Es war vergeblich, ich konnte ihn nicht überzeugen (was übrigens auch schlimm gewesen wäre, weil er im Recht war). War es einzig darum, weil ich die Peanosche Sprache nicht mit hinreichender Beredsamkeit anwenden konnte? Vielleicht; aber unter uns gesagt: ich glaube es nicht.

So bleibt also, trotz des pasigraphischen Apparates, die Frage ungelöst. Was folgt daraus? Sobald es sich nur

darum handelt zu beweisen, daß „Eins“ eine Zahl ist, genügt die Pasigraphie, aber sobald eine Schwierigkeit entsteht, sobald eine Antinomie zu lösen ist, versagt die Pasigraphie.

Viertes Kapitel.

Die neue Logik.

I.

Die Russellsche Logik.

Um das von ihr beanspruchte Ansehen zu retten, mußte sich die Logik einer Umwandlung unterwerfen. Es entstanden neue Logiken, und die interessanteste unter ihnen ist diejenige von Russell. Es scheint, daß man über die formale Logik nichts Neues schreiben konnte und daß Aristoteles sie ganz erschöpft hat. Aber das Gebiet, welches Russell der Logik einräumt, ist unendlich ausgedehnter als das der klassischen Logik, und dieser Forscher fand Mittel und Wege, sich über die logischen Probleme in origineller und manchmal auch richtiger Weise zu äußern.

Während die Logik des Aristoteles vor allem eine Logik der Über- und Unterordnung von Begriffen ist und als Ausgangspunkt die Beziehung des Subjektes zum Prädikate nimmt, ordnet Russell diese Subsummierungslogik (Klassenlogik) der Logik der Urteile und Beweise unter. Der klassische Syllogismus: „Sokrates ist ein Mensch“ usw., macht dem hypothetischen Syllogismus Platz: „Wenn A richtig ist, ist B ebenfalls richtig“, oder: „wenn B richtig ist, ist auch C richtig“ usw. Darauf beruht, nach meiner Meinung, eine der glücklichsten Ideen, denn der klassische Syllogismus ist leicht auf den hypothetischen Syllogismus zurückzuführen, während die umgekehrte Transformation schwierig wäre.

Das ist aber noch nicht alles; die Logik der Urteile Russells ist eigentlich das Studium der Gesetze, nach welchen sich die Kombinationen der Konjunktionen „wenn, und,

oder“, und der Negation „nicht“ bilden. Das ist eine bedeutende Erweiterung der alten Logik. Die Eigenschaften des klassischen Syllogismus lassen sich ohne Mühe auf den hypothetischen Syllogismus übertragen, und in den Formeln dieses letzteren erkennt man leicht die scholastischen Formen wieder; man findet da alles Wesentliche der klassischen Logik. Die Theorie des Syllogismus ist immer nur die Syntax der Konjunktion „wenn“ und vielleicht der Negation.

Indem Russell zwei andere Konjunktionen „und“ und „oder“ hinzufügt, eröffnet er der Logik ein neues Gebiet. Diese Zeichen „und, oder“ folgen denselben Gesetzen wie die beiden Zeichen $\times$ und $+$, d. h. den kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetzen. So stellt „und“ nach Russell die logische Multiplikation dar, während „oder“ die logische Addition darstellt. Auch das ist sehr interessant.

Russell kommt zu dem Schlusse, daß ein falsches Urteil, ganz gleich welcher Art, alle anderen richtigen oder falschen Urteile mit in sich einschließt. Nach Couturats Meinung erscheint diese Schlußfolgerung anfänglich paradox. Es genügt indessen, eine schlechte mathematische Doktorarbeit korrigiert zu haben, um zu erkennen, daß Russell recht hat. Der Kandidat gibt sich oft die größte Mühe, um die erste falsche Gleichung zu finden; sobald er sie aber gefunden hat, ist es ihm ein Leichtes, die überraschendsten Resultate zu sammeln, von denen einige sogar ganz richtig sein können.[47])

II.

Man sieht daraus, um wieviel reichhaltiger die neue Logik ist als die klassische Logik; die Symbole haben sich vervielfältigt und gestatten verschiedene Verbindungen, welche nicht mehr in begrenzter Anzahl vorhanden sind. Ist man berechtigt, diese Erweiterung mit der Bedeutung des Wortes logisch vorzunehmen? Es wäre unnütz, diese

Frage näher zu erörtern und mit Russell einen leeren Wortstreit anzufangen. Wir wollen ihm das, was er verlangt, bewilligen, uns aber nicht darüber aufregen, wenn gewisse Wahrheiten, welche man, im alten Sinne des Wortes, als auf die Logik unreduzierbar erklärte, im neuen Sinne dieses Wortes als wohl auf die Logik reduzierbar findet, weil eben dieser neue Sinn von dem alten gänzlich verschieden ist.

Wir führten eine stattliche Anzahl neuer Begriffe ein, und es waren nicht lediglich einfache Kombinationen der alten Begriffe. Russell hat sich darin nicht getäuscht, und nicht nur bei Beginn des ersten Kapitels, bei Behandlung der Logik der Urteile, sondern auch bei Beginn des zweiten und dritten Kapitels, bei denen es sich um die Logik der Subsummationen („Klassen-Kalkül") und der Beziehungen handelt, führt er neue Wörter ein, die er selbst für unerklärbar hält.

Und weiter: er führt ruhig Prinzipien ein, die er für unbeweisbar erklärt. Aber diese unbeweisbaren Prinzipien sind Berufungen auf die Intuition, sind synthetische Urteile a priori. Wir halten sie für intuitiv, wenn wir ihnen, in größerer oder geringerer Schärfe ausgesprochen, in mathemathischen Abhandlungen begegnen; haben diese unbeweisbaren Prinzipien ihren Charakter geändert, weil der Sinn des Wortes „Logik" so erweitert ist, wie wir es in seinem Werke, betitelt: ›Lehrbuch der Logik finden? Sie haben nicht ihre innere Natur verändert, sondern nur ihren Platz.

III.

Kann man diese Prinzipien vielleicht als verkleidete Definitionen betrachten? Wenn dem so wäre, so müßte man ein Mittel an der Hand haben, um zu beweisen, daß diese verkleideten Definitionen keinen Widerspruch enthalten. Man müßte feststellen, daß man sich, soweit man auch die

Reihe der Schlußfolgerungen verfolgt, niemals dem Widerspruche aussetzt.

Man könnte versuchen, folgendermaßen zu schlußfolgern: Wir können verifizieren, daß die Operationen der neuen Logik, wenn sie auf widerspruchsfreie Prämissen angewandt werden, nur Folgerungen ergeben können, die gleichfalls von Widersprüchen frei sind. Wenn wir also in n Operationen auf keinen Widerspruch stoßen, so werden wir einem solchen auch nicht in der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Operation begegnen. Es ist demnach unmöglich, daß es einen Moment gibt, in dem der Widerspruch beginnt, was beweist, daß wir ihm niemals begegnen werden. Sind wir wirklich berechtigt, so zu schlußfolgern? Nein, denn das hieße den Schluß der vollständigen Induktion anwenden; und das Prinzip der vollständigen Induktion ist — wir wollen es uns immer wieder ins Gedächtnis zurückrufen — uns noch völlig unbekannt.

Wir sind also nicht berechtigt, diese Axiome als verkleidete Definitionen anzusehen, und es bleibt nur noch ein Ausweg: wir müssen für jedes dieser Axiome einen neuen Akt der Intuition zulassen. Das ist auch, wie ich glaube, die Meinung von Russell und Couturat.

So ergibt sich also: die neun unerklärbaren Begriffe und die zwanzig unbeweisbaren Urteile (ich glaube, daß ich leicht noch mehr herausfinden würde, wenn ich sie gezählt hätte), welche die Grundlage der neuen Logik, der Logik im erweiterten Sinn ausmachen, setzen voraus, daß für jeden dieser Begriffe und für jedes Urteil ein neuer und von unserer Intuition unabhängiger Akt stattfindet, und — warum sollte man es nicht so nennen: ein wirkliches synthetisches Urteil a priori. Über diesen Punkt ist alle Welt einig; aber was Russell noch weiter beansprucht und was mir zweifelhaft erscheint, ist, daß die Sache mit diesen Berufungen auf die Intuition beendigt sein soll; daß man nichts anderes mehr zu tun hätte und daß man

die ganze Mathematik begründen könnte, ohne irgendein neues Element einzuführen (d. h. ohne noch weiterer Berufungen auf die Intuition zu bedürfen).

IV.

Couturat wiederholt öfters, daß die neue Logik gänzlich unabhängig von der Vorstellung der Zahl sei. Ich will mir nicht die Zeit nehmen nachzuzählen, wie viele Zahlwörter seine Darstellung enthält, sowohl Kardinalzahlen als Ordinalzahlen, oder unbestimmte Adjektive (wie z. B. das Wort „mehrere"). Wir wollen hier nur einige Beispiele anführen:

„Das logische Produkt von zwei oder mehreren Urteilen ist . . ."

„Alle Urteile sind zweier und nur zweier Werte, wahr und falsch, fähig."

„Das relative Produkt von zwei Beziehungen ist wieder eine Beziehung";

„Eine Beziehung findet zwischen zwei Gliedern statt", usw. usw.[48])

Manchmal würde es nicht unmöglich sein, solche Schwierigkeiten zu umgehen, manchmal aber ist die Schwierigkeit unvermeidlich. Ohne das Vorhandensein zweier Glieder ist eine Beziehung zwischen ihnen undenkbar; es ist unmöglich, eine Intuition von dieser Beziehung zu haben, ohne zu bemerken, daß es eben zwei sind; denn um die Beziehung verständlich zu machen, sind zwei Glieder und eben nur zwei Glieder nötig.

V.

Die Arithmetik.

Ich komme nun zu dem, was Couturat die Ordinaltheorie nennt, und was die Grundlage der eigentlichen Arithmetik ausmacht. Couturat beginnt mit der Aussage

von fünf Peanoschen Axiomen, die, nach den Beweisführungen von Peano und Padoa voneinander unabhängig sind:

I. Null ist eine ganze Zahl.

II. Null folgt auf eine ganze Zahl.

III. Die auf eine ganze Zahl folgende Zahl ist eine ganze Zahl (hier müßte man hinzufügen: für jede ganze Zahl gibt es eine auf ihr folgende Zahl).

IV. Zwei ganze Zahlen sind gleich, wenn die auf sie folgenden Zahlen es sind.

V. Das fünfte Axiom ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

Couturat sieht diese Axiome als verkleidete Definitionen an; sie bilden die Definition durch Postulate von Null, von „folgend", und von der ganzen Zahl.[49])

Aber wir bemerkten vorher, daß man, damit eine Definition durch Postulate angenommen werden kann, feststellen müßte, daß sie keinen Widerspruch enthält.

Ist das nun hierbei der Fall? Nicht im geringsten. Der Beweis kann nicht „durch das Beispiel" erbracht werden. Man kann nicht einen Teil der ganzen Zahlen auswählen, die drei ersten z. B., und beweisen, daß sie der Definition genügen.

Wenn ich die Reihe: 0, 1, 2, nehme, so bemerke ich wohl, daß sie den Axiomen I, II, IV und V genügen; aber, damit die Reihe dem Axiome III genüge, muß 3 vor allem eine ganze Zahl sein, und darum muß die Reihe 0, 1, 2, 3 den Axiomen genügen; man verifiziert, daß sie den Axiomen I, II, IV, V genügt, aber das Axiom III verlangt durchaus, daß 4 eine ganze Zahl sei und daß die Reihe 0, 1, 2, 3, 4 den Axiomen genüge, und so fort.

Es ist also unmöglich, die Axiome für einige ganze Zahlen zu beweisen, ohne sie für alle Zahlen zu beweisen; man muß also auf die Beweisführung durch das Beispiel verzichten.

Es ist folglich notwendig, alle Folgerungen unserer Axiome zusammen ins Auge zu fassen und darauf hin zu prüfen, ob sie einen Widerspruch enthalten. Wenn diese Folgerungen in endlicher Zahl wären, so wäre die Sache leicht, aber sie sind in unendlicher Zahl; sie bilden die ganze Mathematik, oder zum wenigsten die ganze Arithmetik.

Was also nun tun? Strenge genommen könnte man vielleicht die oben unter Nr. III entwickelten Schlußfolgerungen (S. 148) wiederholen.

Wir sagten aber, diese Schlußfolgerung ist die vollständige Induktion, und tatsächlich handelt es sich jetzt gerade darum, das Prinzip der vollständigen Induktion zu rechtfertigen.

VI.

Die Hilbertsche Logik.

Ich komme jetzt zu der Hauptarbeit von Hilbert auf dem Gebiete der Logik; er trug sie auf dem Mathematikerkongreß in Heidelberg vor; eine französische Übersetzung von Pierre Boutroux erschien in der Zeitschrift „l'Enseignement mathématique" und eine englische Übersetzung von Halsted in The Monist.[50]) In dieser Arbeit, in welcher man die tiefsten Gedanken findet, verfolgt der Verfasser ein dem Russellschen ähnliches Ziel, aber in vielen Punkten weicht er von seinem Vorgänger ab.

„Allein bei aufmerksamer Betrachtung", so sagt Hilbert, „werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle, und zur Vermeidung von Paradoxen ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich."

Weiter oben sahen wir, daß das, was Hilbert von den Prinzipien der Logik sagt: so wie man sie gewöhnlich

darstellt, ebenso auf die Russellsche Logik anwendbar ist. Auch nach Russel geht die Logik der Arithmetik voran; nach Hilbert sind die Prinzipien „simultan". Wir werden weiterhin weit tiefgehendere Unterschiede finden. Wir werden dieselben, je nachdem sie sich uns darstellen, hervorheben; ich ziehe es vor, Schritt für Schritt der Entwicklung des Hilbertschen Gedankens zu folgen, indem ich die wichtigsten Stellen genau wörtlich anführe:

„Wir legen unserer Betrachtung zunächst ein Gedankending 1 zugrunde." „Wir erinnern daran, daß wir hierbei keineswegs den Begriff der Zahl voraussetzen, denn wohlverstanden: das Zeichen 1 ist hier ein Symbol, und wir haben uns doch durchaus nicht um die Bedeutung desselben zu kümmern." „Die Zusammenfassungen dieses Dinges", fährt Hilbert fort, „mit sich zu je zwei, drei oder mehr Malen..." Halt! In diesem Falle gilt die eben von uns gemachte Bemerkung nicht mehr; wenn wir die Worte: „zwei", „drei", und überhaupt „mehrere" einführen, so führen wir damit den Zahlbegriff ein; und die Definition der endlichen ganzen Zahl, welche wir sogleich finden werden, kommt dann etwas zu spät. Der Verfasser ist viel zu scharfsinnig, um diese petitio principii nicht zu bemerken. Deshalb sucht er am Schlusse seiner Abhandlung die Lücke zu bemänteln.

Hilbert führt in der Folge zwei einfache Gedankendinge: 1 und = ein und betrachtet alle Kombinationen dieser beiden Dinge, darauf alle Kombinationen ihrer Kombinationen usw. Es versteht sich von selbst, daß man die gewöhnliche Bedeutung dieser beiden Zeichen vergessen muß und ihnen vielmehr keinerlei Bedeutung beilegen darf. Er teilt darauf diese Kombinationen in zwei Klassen, in die Klasse der „Seienden" und in diejenige der „Nichtseienden", und bis auf weiteres ist diese Einteilung vollkommen willkürlich; jedes bejahende Urteil lehrt uns, daß eine Kombination zu der Klasse der Seienden gehört; jedes verneinende Urteil lehrt uns, daß eine gewisse Kombination zu der Klasse der Nichtseienden gehört.

VII.

Wir wollen jetzt einen Unterschied hervorheben, der von der einschneidendsten Bedeutung ist. Bei Russell ist ein willkürliches Objekt, das er mit x bezeichnet, ein absolut unbestimmtes Objekt, über das er nichts voraussetzt; bei Hilbert ist dieses Objekt eine durch die Symbole 1 und = gebildete Kombination; er würde nicht begreifen können, daß man etwas anderes als Kombinationen zwischen bereits definierten Objekten einführt. Hilbert formuliert übrigens diesen Gedanken in denkbar annehmbarer Weise, und ich glaube seinen Wortlaut in extenso anführen zu müssen: „In den Axiomen vertreten die Willkürlichen — als Ersatz für den Begriff „jedes“ oder „alle“ in der üblichen Logik — nur diejenigen Gedankendinge und deren Kombinationen untereinander, die auf jenem Standpunkt (nämlich dem in der Entwicklung der Theorie erlangten Standpunkte) zugrunde gelegt sind oder neu definiert werden sollen. Bei der Herleitung von Folgerungen aus den Axiomen dürfen daher die Willkürlichen, die in den Axiomen auftreten, nur durch solche Gedankendinge und deren Kombinationen ersetzt werden. Auch ist in gehöriger Weise zu berücksichtigen, daß durch die Zufügung und Zugrundelegung eines neuen Gedankendinges die bisherigen Axiome eine Erweiterung ihrer Gültigkeit erfahren bzw. einer sinngemäßen Abänderung zu unterwerfen sind.“

Hier tritt uns der Kontrast mit der Anschauungsweise Russells deutlich vor Augen. Nach Russell konnten wir an Stelle von x nicht nur schon bekannte Objekte, sondern irgend etwas setzen. Russell bleibt seinem Gesichtspunkte treu: nämlich dem der Zusammenfassung. Er geht von der allgemeinen Idee des Seienden aus und bereichert diese Idee immer mehr, indem er sie zugleich beschränkt und doch neue Eigenschaften hinzufügt. Hilbert erkennt — im Gegenteil — als mögliche Objekte nur Kombinationen zwischen schon bekannten Objekten an, so daß man (wenn

man nur einen Teil seines Gedankenganges berücksichtigt) sagen könnte, er stellt sich auf den Gesichtspunkt der allmählichen Ausdehnung.

VIII.

Wir wollen die Entwicklung der Hilbertschen Ideen weiter verfolgen. Er führt zwei Axiome ein, die er in seiner symbolischen Sprache ausspricht und die in unserer gewöhnlichen Sprache lauten: jede Größe ist gleich sich selbst, und jedes auf zwei identische Größen ausgeübte Verfahren ergibt identische Resultate. In dieser Form ausgesprochen, sind die Axiome evident, aber sie so darstellen hieße an dem Gedankengange Hilberts Verrat üben. Nach ihm hat die Mathematik nur reine Symbole zu kombinieren und der wahre Mathematiker soll aus diesen Symbolen schlußfolgern, ohne sich um ihre Bedeutung zu kümmern. Ebenso bedeuten seine Axiome für ihn etwas anderes als für den gewöhnlichen Menschen.

Nach ihm stellen diese Axiome die Definition durch Postulate für das Symbol = dar, das bis jetzt ohne Bedeutung war. Um aber diese Definition zu rechtfertigen, muß Hilbert zeigen, daß die zwei Axiome zu keinem Widerspruch führen.

Zu dem Zwecke bedient sich Hilbert der oben im Abschnitte III (S. 148) von uns besprochenen Schlußweise, bemerkt aber nicht, daß er dabei das Prinzip der vollständigen Induktion zur Anwendung bringt.

IX.

Der Schluß der Hilbertschen Abhandlung ist völlig rätselhaft, und wir wollen darauf nicht weiter eingehen. Die Widersprüche häufen sich; man merkt, wie der Verfasser eine unbestimmte Ahnung der von ihm begangenen petitio principii hat, und wie er sich vergeblich bemüht, die Lücken seiner Schlußfolgerung zu überbrücken.

Das Resultat dieser Darlegungen können wir in folgender Form aussprechen: In demselben Augenblick, in dem Hilbert beweisen will, daß die Definition der ganzen Zahl durch das Axiom der vollständigen Induktion keinen Widerspruch enthält, versagen ihm die Kräfte, wie sie bei Russell und Couturat versagten, weil die Schwierigkeit zu groß ist.

X.

Die Geometrie.

Nach der Meinung von Couturat ist die Geometrie ein unermeßlich ausgedehntes Lehrgebäude, bei dem das Prinzip der vollständigen Induktion nicht in Betracht kommt. Das stimmt bis zu einem gewissen Grade; man kann nicht sagen, daß das Prinzip nicht in Betracht kommt, aber es kommt wenig in Betracht. Ich erinnere an die „Rational Geometry" von Halsted (Newyork, John Wiley and Sons, 1904), die auf den Hilbertschen Prinzipien beruht; hier wird das Prinzip der Induktion zum ersten Male auf Seite 114 (wenn ich nicht irre) angewandt.

Somit ist die Geometrie, die noch vor wenigen Jahren als ein Gebiet erschien, in dem die Intuition unbestritten herrschte, heute das Gebiet, in dem die Logistiker zu triumphieren scheinen. Nichts läßt deutlicher die Bedeutung der geometrischen Arbeiten Hilberts ermessen und den tiefen Einfluß, den sie auf unsere Begriffsbildung ausübten.

Man muß sich dabei aber keiner Täuschung hingeben. Was ist — kurz gesagt — das fundamentale Theorem der Geometrie? Es ist die Tatsache, daß die geometrischen Axiome keinen Widerspruch enthalten, und das kann man nicht ohne das Prinzip der Induktion beweisen.

Wie beweist Hilbert diesen wesentlichen Punkt? Er tut es, indem er sich auf die Analysis und durch sie auf die

Arithmetik stützt, und durch diese wiederum auf das Prinzip der Induktion.[51])

Wenn man jemals eine andere Beweisführung erfände, so müßte man sich doch immer auf dieses Prinzip berufen, weil die möglichen Schlußfolgerungen aus den Axiomen, von denen man beweisen muß, daß sie sich nicht widersprechen, unzählig sind.

XI.

Schlußfolgerungen.

Zunächst schließen wir hieraus, daß das Induktionsprinzip nicht als die verkleidete Definition des ganzen Weltalls betrachtet werden darf.

Unbestreitbar sind folgende drei Wahrheiten:

Das Prinzip der vollständigen Induktion.

Das Postulat von Euklid.

Das physikalische Gesetz, nach welchem der Phosphor bei 44^0 schmilzt (das von Le Roy erwähnt wird).

Man sagt gewöhnlich: dies sind drei verkleidete Definitionen, erstens die Definition der ganzen Zahl, zweitens die Definition der geraden Linie, drittens die Definition des Phosphors.

Ich gebe das zu für den zweiten Satz, aber nicht für die beiden anderen; den Grund für diese scheinbare Inkonsequenz muß ich hier erörtern.

Zunächst haben wir gesehen, daß eine Definition nur angenommen werden darf, wenn festgestellt ist, daß sie keinen Widerspruch enthält. Für die erste der obigen drei Definitionen haben wir gezeigt, daß ein solcher Beweis unmöglich ist; für die zweite dagegen hatte Hilbert, wie wir soeben erwähnten, einen vollständigen Beweis gegeben.

Für die dritte Definition ist es klar, daß sie keinen Widerspruch enthält: aber ist es deshalb sicher, daß diese Definition, wie sie es doch müßte, die Existenz des definierten

Objektes garantiert? Wir sind hier nicht mehr im Gebiete der mathematischen, sondern im Gebiete der physikalischen Wissenschaft, und das Wort Existenz hat folglich nicht mehr denselben Sinn (vgl. oben S. 137 und 150); es bezeichnet nicht mehr die Freiheit von Widersprüchen, sondern die objektive Existenz.

Dies ist ein erster Grund für die oben gemachte Unterscheidung zwischen den drei Fällen; ein anderer Grund ist der folgende. Bedienen wir uns dieser drei Begriffe bei Anwendung derselben so, als wenn sie uns durch obige drei Sätze definiert wären?

Die möglichen Anwendungen des Induktionsprinzipes sind unzählig; nehmen wir z. B. eine der von uns oben dargelegten Anwendungen, bei der man zu beweisen sucht, daß ein gewisses System von Axiomen nicht zu einem Widerspruche führen kann. Zu dem Zwecke betrachten wir eine der Schlußreihen, die sich aus den vorausgesetzten Axiomen ableiten lassen.

Wenn man den n^{ten} Schluß gezogen hat, so sieht man, daß man noch einen weiteren ziehen kann, und das ist der $(n+1)^{\text{te}}$; die Zahl n dient hier zum Zählen einer Reihe von sukzessiven Operationen, sie ist eine Zahl, die durch sukzessive Additionen erhalten werden kann. Sie ist also auch eine Zahl, von der aus man durch sukzessive Subtraktionen zur Einheit zurückkehren kann. Offenbar könnte man das nicht, wenn $n = n - 1$ wäre, denn dann würde man durch Subtraktion immer dieselbe Zahl wieder finden. Die Art und Weise, wie wir die Zahl n hier betrachtet haben, schließt also eine Definition der endlichen ganzen Zahl ein, und diese Definition ist die folgende: eine endliche ganze Zahl ist eine solche, die durch sukzessive Additionen erhalten werden kann, und bei der niemals n gleich $n - 1$ ist.

Um was handelt es sich nun bei der obigen Reihe von Schlüssen? Wir beweisen, daß es beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Schlusse

keinen Widerspruch geben kann, wenn ein solcher beim n^{ten} Schlusse nicht auftrat, und wir schließen daraus, daß niemals ein Widerspruch auftreten kann. „Ja“ wird man sagen, „ich habe das Recht so zu schließen, weil die ganzen Zahlen der Definition nach solche Zahlen sind, für die ein derartiger Schluß berechtigt ist“; indessen hierbei wird eine andere Definition der ganzen Zahl vorausgesetzt, und zwar die folgende: eine ganze Zahl ist eine solche, für welche die rekurrente Schlußweise erlaubt ist; im vorliegenden Falle also eine solche Zahl, von der man behaupten kann, daß für keinen Schluß, dessen Nummer eine ganze Zahl ist, jemals ein Widerspruch zu befürchten sei, wenn die Widerspruchsfreiheit für einen Schluß, dessen Nummer eine ganze Zahl ist, zur Folge hat, daß auch der Schluß, dessen Nummer die nächste ganze Zahl ist, keinen Widerspruch enthält.

Beide Definitionen sind nicht identisch; zweifellos sind sie einander äquivalent, aber nur infolge eines synthetischen Urteils a priori; von der einen zur andern kann man nicht durch rein logische Prozesse übergehen. Wir haben folglich nicht das Recht, die zweite Definition anzuwenden, nachdem wir die ganze Zahl auf einem Wege eingeführt haben, der die erste Definition voraussetzt.[52])

Wie steht es im Gegensatze hierzu mit dem Postulate von der geraden Linie? Das habe ich schon so oft auseinandergesetzt, daß ich es nur zögernd wiederholen kann: ich beschränke mich darauf, meine Meinung kurz zusammenzufassen.

Wir haben hier nicht, wie im vorhergehenden Falle, zwei äquivalente Definitionen, die logisch nicht aufeinander zurückführbar sind. Wir haben nur eine Definition, und diese ist durch Worte ausdrückbar. Man wird sagen, es gibt noch eine andere Definition, die wir fühlen, ohne sie aussprechen zu können, denn wir haben die Anschauung von der geraden Linie, und wir können uns dieselbe vorstellen. Aber wir können sie uns nicht im geometrischen Raume vorstellen, sondern

nur im Vorstellungsraume, und wir können uns ebensogut Dinge vorstellen, die alle anderen Eigenschaften der geraden Linie besitzen, nur nicht dem Euklidischen Postulate genügen. Diese Dinge sind „die Nicht-Euklidischen geraden Linien", welche durchaus nicht jeder realen Bedeutung entbehren, sondern in gewissem Sinne als Kreise vorgestellt werden können, (als wirkliche Kreise im wirklichen Raume), die zu einer gewissen Kugel orthogonal sind. Wenn wir die ersteren (die Euklidischen Geraden) als gerade Linien bezeichnen und nicht die letzteren (die Nicht-Euklidischen Geraden), so geschieht dies auf Grund der Definition.[58])

Was endlich das dritte Beispiel, die Definition des Phosphors, betrifft, so sehen wir, daß die wahre Definition folgendermaßen lauten müßte: Phosphor nenne ich das Stück Materie, das ich vor mir in der Flasche habe.

XII.

Da ich gerade bei diesem Gegenstande bin, will ich noch eine Bemerkung hinzufügen. Über das Beispiel des Phosphors hatte ich bei anderer Gelegenheit folgendes gesagt: „Dieser Satz ist ein wirkliches verifizierbares physikalisches Gesetz, denn er sagt aus, daß alle Körper, welche alle anderen Eigenschaften des Phosphors außer dem Schmelzpunkt desselben besitzen, auch wie der Phosphor bei 44^0 schmelzen." Darauf hat man mir erwidert: „Nein, dieses Gesetz ist nicht verifizierbar, denn, wenn man durch Beobachtung festgestellt hätte, daß von zwei dem Phosphor ähnlichen Körpern der eine bei 44^0, der andere bei 50^0 schmilzt, so könnte man sicher behaupten, daß diese beiden Körper sich nicht bloß durch den Schmelzpunkt, sondern noch durch eine andere, wenn auch unbekannte Eigenschaft unterscheiden."

Aber das gibt nicht genau wieder, was ich sagen wollte; ich hätte mich in folgender Weise ausdrücken sollen: alle Körper, welche die und die Eigenschaften in endlicher Anzahl besitzen (nämlich die Eigenschaften des Phosphors, wie

sie in jedem Lehrbuch der Chemie aufgeführt sind), über deren Schmelzpunkt ich aber nichts weiß, schmelzen sicher bei 44^0.

Um den Unterschied zwischen dem Falle der geraden Linie und dem Falle des Phosphors noch mehr hervortreten zu lassen, möge noch folgendes bemerkt werden. Von der geraden Linie besitzen wir in der Natur verschiedene mehr oder weniger unvollkommene Bilder, hauptsächlich den Lichtstrahl und die Rotationsachse eines starren Körpers. Ich will annehmen, man habe festgestellt, daß der Lichtstrahl dem Postulate Euklids nicht genügt (z. B. indem man zeigt, daß ein Stern eine negative Parallaxe hat), was werden wir daraus folgern? Werden wir schließen, daß die Gerade, die der Definition nach mit dem Lichtstrahle identisch ist, dem Postulate nicht genügt, oder lieber, daß die Gerade der Definition nach dem Postulate genügt, der Lichtstrahl aber nicht geradlinig ist?

Wir können sicher nach Belieben die eine oder die andere Definition annehmen und folglich den einen oder den andern Schluß ziehen; es wäre indessen unsinnig, die erste Definition anzunehmen, denn der Lichtstrahl genügt wahrscheinlich nicht nur dem Euklidschen Postulate nur unvollkommen, sondern ebenso unvollkommen den anderen Eigenschaften der geraden Linie. Ebenso wie er von der Euklidischen geraden Linie abweicht, weicht er auch von der Rotationsachse eines starren Körpers ab, die ein anderes unvollkommenes Bild der Geraden darstellt; der Lichtstrahl endlich ist sicher gewissen Veränderungen unterworfen, und folglich würde eine Linie, die gestern gerade war (wenn der Lichtstrahl zu ihrer Definition diente) morgen nicht mehr gerade sein, sobald irgendwelche physikalische Verhältnisse sich geändert haben.

Nehmen wir nun an, man habe die Entdeckung gemacht, daß der Phosphor nicht bei 44^0, sondern bei $43{,}9^0$ schmilzt, werden wir daraus schließen müssen, daß der Phosphor, der als ein bei 44^0 schmelzender Körper definiert ist, dieser

Körper, den wir bisher Phosphor nannten, kein richtiger Phosphor sei, oder werden wir nicht lieber schließen, daß der Phosphor bei $43{,}9^0$ und nicht bei 44^0 schmilzt? Auch hier können wir nach Belieben jede der beiden Definitionen annehmen und folglich auch jeden der beiden Schlüsse ziehen; aber es wäre unsinnig, die erste Definition anzunehmen, denn man kann den Namen eines Körpers nicht jedesmal ändern, wenn man seinen Schmelzpunkt um eine Dezimale genauer bestimmt hat.

XIII.

Zusammenfassung.

Russell und Hilbert haben beide einen wichtigen Schritt vorwärts getan; jeder von ihnen hat ein Buch geschrieben, das voll ist von originellen, tiefen und oft sehr beachtungswerten Gesichtspunkten. Beide Bücher geben uns Veranlassung zu tiefem Nachdenken, und wir haben viel aus ihnen zu lernen. Von ihren Resultaten sind einige, sogar viele fest begründet und haben bleibenden Wert.

Aber wenn man deshalb sagen wollte, daß sie den Streit zwischen Kant und Leibniz endgültig entschieden und die Kantsche Theorie der Mathematik widerlegt hätten, so wäre das offenbar nicht richtig. Ich weiß nicht, ob sie wirklich selbst der Ansicht waren, dies getan zu haben; wenn sie aber der Ansicht waren, so haben sie sich getäuscht.

Fünftes Kapitel.

Die neuesten Arbeiten der Logistiker.

I.

Die Logistiker haben versucht, auf die vorstehenden Überlegungen zu antworten. Zu dem Zwecke mußten sie die Logistik umformen; insbesondere hat Russel seine ursprünglichen Ansichten in gewissen Punkten modifiziert. Ohne mich auf Einzelheiten des Streites einzulassen, möchte ich auf die

beiden nach meiner Ansicht wichtigsten Fragen hier zurückkommen, nämlich: haben sich die Regeln der Logistik bisher als fruchtbar und unfehlbar erwiesen? Ist es wahr, daß sie das Prinzip der vollständigen Induktion zu beweisen gestatten, ohne sich auf die Intuition zu berufen?

II.

Die Unfehlbarkeit der Logistik.

Was die Fruchtbarkeit betrifft, so scheint sich Couturat darüber Illusionen zu machen. Nach ihm hat die Logistik der mathematischen Erfindung „Flügel und Siebenmeilenstiefel" verliehen, und auf der folgenden Seite sagt er: „Es sind jetzt zehn Jahre verflossen, seit Peano die erste Ausgabe seines Formulaire veröffentlichte."

Wie, seit zehn Jahren habt Ihr Flügel und seid noch immer nicht geflogen?

Ich hege die größeste Hochachtung für Peano; er hat schöne Arbeiten gemacht (z. B. seine Arbeit über eine Kurve, welche eine ganze Fläche ausfüllt); aber schließlich ist er nicht weiter gegangen und auch nicht schneller vorwärts gekommen als die meisten Mathematiker, die keine Flügel haben, und hätte alles ebenso erreicht, wenn er einfach zu Fuß gegangen wäre.[54])

Ich sehe im Gegenteil in der Logistik nur Fesseln für den Denker; sie bedeutet für uns keinen Gewinn an Kürze, ja, sie ist weit davon entfernt, und wenn sie 27 Gleichungen braucht, um festzustellen, daß 1 eine Zahl ist, wie viele Gleichungen würde sie dann wohl brauchen, um ein wirkliches Theorem zu beweisen? Wenn wir nach Whitehead das Individuum x unterscheiden, dann die Klasse, deren einziges Glied x ist, und die ιx heißt, dann die Klasse, deren einziges Glied die Klasse ist, deren einziges Glied x ist und die $\iota\iota x$ heißt: glaubt man etwa durch diese Unterscheidungen, so nützlich sie auch sein mögen, unser Vorwärtskommen bedeutend erleichtern zu können?

Die Logistik zwingt uns alles das auszusprechen, was man gewöhnlich stillschweigend als selbstverständlich voraussetzt; sie zwingt uns, Schritt für Schritt vorzugehen; das mag ja wohl sicherer sein, aber schneller kommt man dabei gewiß nicht vorwärts.

Ihr Logiker verleiht uns keineswegs Flügel, Ihr haltet uns nur am Gängelband. Dann hätten wir aber wenigstens das Recht von Euch zu verlangen, daß Ihr uns damit vor dem Fallen bewahrt. Das wäre dann Eure einzige Entschuldigung.

Wenn ein Wertpapier keine bedeutenden Zinsen einbringt, so muß es doch wenigstens eine bescheidene Kapitalsanlage für einen gewissenhaften Familienvater abgeben.

Soll man nun Eueren Regeln blindlings folgen? Gewiß, denn sonst würde nur allein die Intuition es uns ermöglichen, zwischen diesen Regeln zu unterscheiden; dann aber müßten sie unfehlbar sein; nur einer unfehlbaren Autorität kann man blindes Vertrauen entgegenbringen. Diese Unfehlbarkeit ist eine Notwendigkeit für Euch. Entweder Ihr seid unfehlbar oder Ihr hört auf zu existieren.

Ihr habt kein Recht uns zu sagen: „Wir geben zu, daß wir uns täuschen, aber Ihr täuscht Euch auch.“ Wenn wir uns täuschen, so ist es ein Unglück für uns, ein sehr großes Unglück; für Euch aber ist Täuschung gleichbedeutend mit Vernichtung.

Saget auch nicht: Verhindert die Unfehlbarkeit der Arithmetik die Irrtümer bei der Addition? Die Rechnungsregeln sind unfehlbar, und doch sieht man, wie *diejenigen sich täuschen, welche diese Regeln nicht richtig anwenden*; wenn man ihre Rechnung durchsieht, so bemerkt man sofort, bei welcher Stelle sie sich geirrt haben. Hier handelt es sich um mehr; die Logistiker *haben ihre Regeln angewandt* und haben sich doch in Widersprüche verwickelt; das stimmt in solchem Maße, daß sie sich anschicken, diese Regeln zu ändern und „den Begriff der

Klasse aufzugeben". Warum aber die Regeln ändern, wenn sie unfehlbar waren?

„Wir brauchen nicht" — so meint Ihr — „hic et nunc — alle möglichen Probleme zu lösen." Oh, soviel verlangen wir ja gar nicht von Euch; wenn Ihr, einem Problem gegenübergestellt, keine Lösung gebt, so werden wir nichts darüber sagen; Ihr gebt uns aber im Gegenteil zwei Lösungen eines Problems, welche einander widersprechen, und von denen deshalb eine zum mindesten falsch sein muß, und darin besteht der Bankerott der Logistik.

Russell versucht es, diese Widersprüche auszugleichen; seiner Meinung nach kann man nichts tun als „den Begriff der Klasse beschränken oder sogar aufgeben". Couturat zieht den Erfolg dieses Versuches in Erwägung und bemerkt dazu: „Wenn die Logistiker hier Erfolg haben, wo die anderen gescheitert sind, wird Poincaré sich wohl an diesen Satz erinnern und den Ruhm der Lösung der Logistik zuerkennen."

Keineswegs: Die Logistik existiert, sie hat ihr Gesetzbuch, das schon vier Auflagen erlebte; oder vielmehr: dieses Gesetzbuch ist eigentlich die Logistik. Will Russell uns den Beweis dafür erbringen, daß mindestens eine der beiden einander widersprechenden Beweisführungen die Gesetze der Logik verletzt habe? Nichts weniger als das: er schickt sich an, diese Gesetze zu ändern und eine gewisse Anzahl von ihnen abzuschaffen. Wenn ihm das gelingt, dann werde ich Achtung vor der Intuition Russells haben, aber nicht vor der Logistik Peanos, über welche er dann das Todesurteil gesprochen hat.[55])

III.

Die Zulässigkeit des Widerspruches.

Ich habe der von den Logistikern angenommenen Definition der ganzen Zahl zwei Haupteinwürfe entgegengestetzt. Was gibt nun Couturat auf den ersten dieser Einwürfe für eine Antwort?

Welche Bedeutung hat das Wort existieren in der Mathematik? Ich behauptete, es heißt: „frei von Widerspruch sein." Das bestreitet Couturat; er behauptet[56]): „die logische Existenz ist etwas ganz anderes als ‚frei von Widerspruch sein'. Sie besteht in der Tatsache, daß eine Klasse nicht leer bleibt; wenn man sagt; es existieren *a*'s, so heißt das: durch Definition festsetzen, daß die Klasse *a* nicht Null ist." Es ist zweifellos, wenn man festsetzt, daß die Klasse *a* nicht Null ist, so heißt das: durch Definition festsetzen, daß es *a*'s gibt. Aber die eine Festsetzung ist so sinnlos wie die andere, wenn sie nicht beide bedeuten: entweder, daß man die *a* sehen und berühren kann (das meinen die Physiker und Naturforscher), oder, daß man sich ein *a* vorstellen kann, ohne in Widersprüche zu geraten (und das meinen die Logiker und die Mathematiker).

Für Couturat heißt es nicht: der Nichtwiderspruch bedingt die Existenz, sondern: die Existenz bedingt den Nichtwiderspruch. Um die Existenz einer Klasse festzustellen, muß man also erst durch ein Beispiel feststellen, daß es ein Individuum gibt, das dieser Klasse angehört: „Aber" — wird man erwidern — „wie beweist man die Existenz dieses Individuums? Ist es nicht notwendig, daß diese Existenz festgestellt sei, damit man daraus die Existenz der Klasse, von der das Individuum ein Teil ist, ableiten kann? — Nein, dem ist nicht so: so paradox die Behauptung auch scheinen mag: man beweist niemals die Existenz eines Individuums. Die Individuen — eben weil sie Individuen sind — werden immer als schon vorhanden, also existierend, angesehen. Man hat niemals auszudrücken, daß ein Individuum absolut genommen existiert, sondern nur, daß es in einer Klasse existiert." Couturat findet seine eigene Behauptung paradox; er wird sicher nicht der einzige sein. Diese Behauptung muß aber doch einen Sinn haben; sie will ohne Zweifel aussagen, daß die Existenz eines Individuums, das allein auf der Welt ist, und von dem man nichts aussagt, zu

keinem Widerspruche Veranlassung gibt; sobald das Individuum allein ist, ist es klar, daß es niemandem in den Weg kommen kann. Also gut, wir wollen die Existenz des Individuums „absolut genommen" zulassen; aber nur in diesem Sinne lassen wir seine Existenz zu; es bleibt die Existenz des Individuums „in einer Klasse" zu beweisen übrig, und deshalb muß man immer beweisen, daß die Aussage: „dieses Individuum gehört zu dieser oder jener Klasse" weder sich selbst, noch den anderen angenommenen Postulaten widerspricht.

Couturat sagt weiter: „Es wäre eine willkürliche und verwerfliche Anmaßung zu behaupten, daß eine Definition erst dann gültig sei, nachdem man zuvor bewiesen hat, daß sie keinen Widerspruch enthält." Man könnte nicht energischer und stolzer die Zulässigkeit des Widerspruches verkünden.[57]) „Auf jeden Fall kommt die Last des Beweises denen zu, welche glauben, daß diese Prinzipien sich widersprechen. Postulate werden als miteinander verträglich vorausgesetzt bis zum Beweise des Gegenteils, genau so wie ein Angeklagter als unschuldig gilt, bis seine Schuld erwiesen ist."

Es ist unnütz beizufügen, daß ich mit dieser Verkündigung der Freiheit des Widerspruchs nicht einverstanden bin. Man wird mir entgegensetzen: die verlangte Beweisführung ist unmöglich, und man kann von uns Logikern nicht verlangen „den Mond vom Himmel zu holen". Ganz recht; für Euch ist der Beweis unmöglich, für uns nicht; wir lassen eben das Induktionsprinzip als synthetisches Urteil a priori zu. Das ist für Euch ebensogut eine Notwendigkeit wie für uns.

Um zu beweisen, das ein System von Postulaten keinen Widerspruch enthält, muß man das vollständige Induktionsprinzip anwenden; dieser Modus der Beweisführung hat nichts „Bizarres", sondern ist der einzig richtige. Es ist nicht „unwahrscheinlich", daß man ihn jemals angewendet hätte; und es ist auch nicht schwer, für diesen Modus „Beispiele

und frühere Fälle" zu finden. Ich habe deren zwei in einer früheren Erörterung angeführt, welche der Hilbertschen Arbeit entnommen waren. Er ist nicht der einzige, der von dieser Schlußweise Gebrauch machte, und die es nicht taten, hatten unrecht. Was ich Hilbert zum Vorwurf machte, war nicht seine Zuhilfenahme des Induktionsprinzipes (einem solchen Vollblutmathematiker war es nicht möglich, zu übersehen, daß eine Beweisführung nötig war, und daß gerade diese die einzig mögliche war); ich machte ihm nur zum Vorwurf, diese Beweisführung zu Hilfe genommen zu haben, ohne sie als die rekurrente Schlußfolgerung zu erkennen (vgl. S. 154).

IV.

Der zweite Einwurf.

Ich machte bereits auf einen zweiten logistischen Irrtum in der Hilbertschen Arbeit aufmerksam; heutzutage ist Hilbert in den Bann getan und Couturat läßt ihn nicht mehr als Logistiker gelten; nun wird mich Couturat fragen, ob ich bei den orthodoxen Logistikern denselben Fehler gefunden habe. In den Seiten, die ich las, fand ich ihn nicht, und ich weiß nicht, ob ich ihn in den vierhundert Seiten, die sie noch weiter geschrieben haben, finden würde; ich spüre kein Verlangen, sie zu lesen.

Die Logistiker müssen jenen Fehler begehen, sobald sie die mathematische Wissenschaft zu irgendwelcher Anwendung benutzen wollen. Der Zweck dieser Wissenschaft ist aber nicht nur, unentwegt ihr ureigenstes Selbst in Betracht zu ziehen; die Mathematik hat mit der Natur selbst Fühlung, und früher oder später wird sie mit ihr in enge Berührung kommen; dann wird es heißen, die rein verbalen Definitionen abschütteln und sich nicht mehr mit Worten begnügen.

Wir wollen auf das Beispiel Hilberts zurückkommen; es handelt sich stets um die rekurrente Schlußweise und um die Frage, ob ein System von Postulaten keinen Wider-

spruch enthält. Couturat wird mir darauf zweifellos erwidern, daß ihn das nichts weiter angehe, aber vielleicht interessiert es doch diejenigen, welche nicht so wie er die Zulässigkeit des Widerspruchs verkünden.

Wir wollen, wie schon oben, beweisen, daß wir nach einer beliebigen Anzahl von Schlüssen keinem Widerspruche begegnen werden; die Anzahl dieser Schlüsse kann so groß sein wie sie will, nur muß sie endlich sein. Zu dem Zwecke muß man das Induktionsprinzip anwenden. Dürfen wir unter einer endlichen Anzahl jede Zahl verstehen, auf welche das Induktionsprinzip der Definition nach anwendbar ist? Ganz gewiß nicht, das würde zu den unbequemsten Konsequenzen führen.

Um das Recht zu haben, ein System von Postulaten aufzustellen, müssen wir erst versichert sein, daß diese Postulate keine Widersprüche enthalten. Das ist eine Wahrheit, die von dem größten Teile der Gelehrten anerkannt wird, ich würde von allen geschrieben haben, bevor ich die letzte Arbeit von Couturat gelesen hatte. Was bedeutet diese Wahrheit? Soll damit gesagt werden: nach einer endlichen Anzahl von Schlüssen müssen wir sicher sein, keinem Widerspruche zu begegnen, wobei die endliche Zahl der Definition nach eine solche ist, welche alle Eigenschaften rekurrenter Natur besitzt, und zwar derart, daß wir übereinkommen zu sagen, die fragliche Zahl ist nicht endlich, sobald eine dieser Eigenschaften nicht vorhanden ist, sobald wir also z. B. auf einen Widerspruch stoßen?

Mit anderen Worten, sollen wir die folgende Meinung vertreten: wir können sicher sein, keinem Widerspruche zu begegnen unter der Bedingung, daß wir übereinkommen gerade in dem Augenblick innezuhalten, wo wir gerade auf einen Widerspruch stoßen? Es genügt einen solchen Vorschlag auszusprechen, um ihn zu verwerfen.

Die Hilbertsche Schlußweise setzt also nicht nur das

Induktionsprinzip voraus, sie setzt außerdem voraus, daß uns dieses Prinzip nicht als einfache Definition gegeben ist, sondern als synthetisches Urteil a priori.

Kurz: Eine Beweisführung ist notwendig.

Die einzig mögliche Beweisführung ist die rekurrente Beweisführung.

Sie ist nur dann zu rechtfertigen, wenn man das Induktionsprinzip zuläßt und wenn man sie nicht als Definition, sondern als synthetisches Urteil ansieht.

V.

Die Cantorschen Antinomien.

Ich will jetzt die Prüfung der neuen Russellschen Abhandlung vornehmen.[58]) Diese Abhandlung wurde geschrieben, um über die Schwierigkeiten zu triumphieren, welche sich aus Anlaß der Cantorschen Antinomien erhoben, auf die wir schon wiederholt hinwiesen. Cantor glaubte eine Wissenschaft des Unendlichen aufbauen zu können; andere haben sich auf dem von ihm eröffneten Weg weiter vorgewagt, sind aber bald auf fremdartige Widersprüche gestoßen. Diese Antinomien sind schon in stattlicher Anzahl vorhanden; die berühmtesten sind:

1. die Burali-Fortische Antinomie;
2. die Zermelo-Königsche Antinomie;
3. die Richardsche Antinomie.

Cantor hat bewiesen, daß die Ordinalzahlen (es handelt sich dabei um die transfiniten Ordinalzahlen, welch neuer Begriff durch ihn eingeführt wurde) in eine lineare Reihe geordnet werden können, das soll heißen: von zwei ungleichen Ordinalzahlen ist eine stets kleiner als die andere. Burali-Forti beweist das Gegenteil; er äußert sich im wesentlichen dahin, daß, wenn man alle Ordinalzahlen in eine lineare Reihe einfügen könnte, diese Reihe eine Ordinalzahl definieren würde, die weit größer als alle anderen sein müßte; man würde ihr folglich 1 zufügen können und

erhielte dann eine Ordinalzahl, die noch viel größer sein müßte, und darin besteht der Widerspruch.

Wir werden weiterhin noch auf die Antinomie Zermelo-Königs zu sprechen kommen, welche etwas verschiedener Natur ist; hier will ich zunächst die Antinomie Richards besprechen (Revue générale des Sciences, 30 juin 1905). Wir wollen alle Dezimalzahlen, die man vermöge einer endlichen Wortzahl definieren kann, ins Auge fassen; diese Dezimalzahlen bilden eine Menge E, und es ist leicht zu ersehen, daß diese Menge abzählbar ist, d. h. daß man die verschiedenen Dezimalzahlen dieser Menge von 1 bis Unendlich numerieren kann. Wir wollen annehmen, dieses Numerieren wäre ausgeführt, und eine Zahl N in folgender Weise definieren: Wenn die n^{te} Dezimale der n^{ten} Zahl der Menge E

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

ist, dann soll die n^{te} Dezimale von N

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1$$

sein. Wie man sieht, ist N nicht gleich der n^{ten} Zahl von E, und da n beliebig ist, kann N der Menge E nicht angehören, und dennoch müßte N dieser Menge angehören, denn wir haben N durch eine endliche Anzahl von Worten definiert.

Wir werden weiterhin sehen (vgl. unten VII), daß Richard selbst eine außerordentlich scharfsinnige Erklärung für das von ihm aufgestellte Paradoxon gegeben hat; seine Erklärung kann mutatis mutandis auf andere analoge Paradoxa angewandt werden. Russell erwähnt noch eine andere amüsante und lehrreiche Antinomie:

Welches ist die kleinste ganze Zahl, die man nicht durch einen Satz definieren kann, der weniger als hundert französische Worte enthält?

Eine solche Zahl existiert; die Zahlen, welche durch einen derartigen Satz definiert werden können, sind offenbar in

endlicher Anzahl vorhanden, denn in der französischen Sprache gibt es nicht unendlich viele Worte. Unter diesen Zahlen muß es also eine geben, die kleiner ist als alle übrigen.

Andererseits existiert eine solche Zahl nicht, denn ihre Definition bedingt einen Widerspruch. Diese Zahl nämlich wird durch den gesperrt gedruckten Satz definiert, und dieser enthält weniger als hundert Worte; nach der Definition aber soll diese Zahl nicht durch einen Satz definiert werden können, der weniger als hundert Worte enthält.

VI.

Zig Zag Theory und ‚No class' Theory.

Wie verhält sich nun Russell gegenüber diesen Widersprüchen? Er analysiert die von uns soeben besprochenen Antinomien und erwähnt außerdem noch andere, er gibt ihnen sodann eine Form, die an Epimenides erinnert und kommt schließlich zu folgendem Schlusse:

„A propositional function of one variable does not always determine a class." Eine propositionelle Funktion (d. h. eine Definition) bestimmt nicht immer eine Klasse. Eine „propositionelle Funktion" oder „Norm" kann auch „nicht-prädikativ" sein. Das soll aber nicht heißen, daß diese nicht-prädikativen Definitionen eine leere Klasse (eine Nullklasse) bestimmen; sondern es soll damit gesagt sein, daß es keinen Wert von x gibt, welcher der Definition genügt und gleichzeitig eines der Elemente der Klasse sein könnte. Die Elemente existieren zwar, aber sie haben nicht das Recht, sich zusammenzutun, um eine Klasse zu bilden.

Das ist aber erst der Anfang; man muß noch unterscheiden lernen, ob eine Definition prädikativ ist oder nicht. Zur Lösung dieses Problems bringt Russell drei verschiedene Theorien in Vorschlag, ohne sich für eine derselben zu entscheiden; er nennt sie:

A. the zigzag theory;
B. the theory of limitation of size;
C. the ‚no class' theory.

Nach der zigzag theory „bestimmen die Definitionen (die sogenannten propositionellen Funktionen) eine Klasse, wenn sie sehr einfach sind, bestimmen aber keine Klasse, wenn sie kompliziert und dunkel sind". Wer soll nun entscheiden, ob eine Definition als hinreichend einfach zu gelten hat, um annehmbar zu sein? Auf diese Frage fehlt jede Antwort, statt derselben findet sich das offene Geständnis, daß die Antwort unmöglich ist, nämlich in folgenden Worten: „Die Regeln, welche zu erkennen gestatten, ob diese Definitionen prädikativ sind, gestalten sich außerordentlich kompliziert und lassen sich kaum durch irgendeine plausible Begründung stützen. Diesem Mangel könnte man durch größere Erfindungsgabe abhelfen, oder auch durch Einführung noch weiter gehender Unterscheidungen. Aber beim Suchen nach solchen Regeln habe ich bisher kein anderes leitendes Prinzip finden können als die Vermeidung von Widersprüchen."

Diese Theorie erweist sich demnach als recht dunkel; in all dieser Finsternis erscheint nur ein Lichtblick: das Wort Zickzack. Was Russell die „zigzag-giness" nennt, ist sicher nichts anderes, als der eigentümliche Charakter, durch den sich auch die Argumentation des Epimenides auszeichnet.

In der theory of limitation of size würde eine zu ausgedehnte Klasse keine Existenzberechtigung haben. Sie könnte vielleicht unendlich ausgedehnt sein, aber sie dürfte nicht zu stark unendlich sein.

Wir stoßen hier immer auf dieselbe Schwierigkeit: wie soll man genau feststellen, von welchem Momente ab eine Klasse als zu ausgedehnt gelten soll? Diese Schwierigkeit wird bei Russell nicht gelöst, er geht vielmehr zu seiner dritten Theorie über.

In der ‚no class‘ theory ist es verboten, das Wort Klasse auszusprechen, man muß es durch verschiedene Umschreibungen ersetzen. Welche Neuerung für die Logistiker, die sonst nur von Klassen und von Klassen von Klassen sprechen! Sie müssen jetzt die ganze Logistik von Grund aus neu aufbauen. Man stelle sich vor, wie eine Seite aus einem Buche über Logistik aussehen wird, wenn man alle Sätze ausstreicht, in denen von Klassen gesprochen wird! Inmitten einer leeren Seite werden ganz vereinzelt einige überlebende Sätze stehen bleiben. Apparent rari nantes in gurgite vasto.

Wie dem auch sein möge, jedenfalls erkennt man aus vorstehendem die Gründe, weshalb Russell zögerte, sich zu entscheiden, und man ersieht, welche Modifikationen er an den fundamentalen Prinzipien anzubringen beginnt, die er bisher anerkannt hatte. Er wird Kriterien einführen müssen, auf Grund deren man entscheiden kann, ob eine Definition zu kompliziert oder zu umfassend ist, und diese Kriterien werden sich nur durch einen Appell an die Intuition begründen lassen.

Russell selbst neigt schließlich dazu, die ‚no class‘ theory anzunehmen.

Jedenfalls muß die Logistik revidiert werden, und man wird kaum angeben können, was sich noch wird retten lassen. Ich brauche nicht hinzuzufügen, daß es sich hier nur um den Cantorismus und um die Logistik handelt; die wahre Mathematik, d. h. diejenige, die zu etwas Ersprießlichem führt, kann sich ungestört auf Grund ihrer eigenen Prinzipien weiter entwickeln, ohne sich um die Stürme zu kümmern, die um sie her toben, und sie wird fortfahren Schritt für Schritt ihre Eroberungen zu machen, ohne die Besorgnis, daß diese Eroberungen später einmal modifiziert oder aufgegeben werden müßten.

VII.

Die richtige Lösung.

Für welche von diesen verschiedenen Theorien sollen wir uns entscheiden? Wie mir scheint, ist die Antwort in einem Briefe von Richard enthalten, den ich schon oben erwähnte, und den man in der Revue Générale des Sciences vom 30. Juni 1905 findet. Nach Aufstellung der Antinomie, die wir oben als Antinomie Richards besprachen, gibt er dort deren Erklärung.

Wir beziehen uns dabei auf das oben in V über diese Antonomie Gesagte: E ist die Menge aller Zahlen, die man durch eine endliche Anzahl von Worten definieren kann, ohne den Begriff der Menge E selbst einzuführen. Ohne diesen letzteren Zusatz würde die Definition von E einen circulus vitiosus enthalten; man kann E nicht durch die Menge E selbst definieren.

Nun haben wir oben die Zahl N zwar mittelst einer endlichen Anzahl von Worten definiert, aber wir haben uns dabei auf den Begriff der Menge E gestützt. Das ist der Grund, weshalb N der Menge E nicht angehören kann.

In dem von Richard gewählten Beispiele zeigt sich diese Schlußfolgerung in voller Deutlichkeit, und diese Deutlichkeit tritt noch evidenter hervor, wenn man den Wortlaut seines Briefes selbst nachliest. Man überzeugt sich leicht, daß dieselbe Erklärung auch auf andere Antinomien anwendbar ist.[59])

Die Definitionen also, welche als nicht-prädikativ betrachtet werden müssen, sind demnach diejenigen, welche einen circulus vitiosus enthalten. Die vorstehenden Beispiele zeigen hinreichend, was ich damit meine. Ist es etwa dies, was Russell die „zigzagginess" nennt? Ich werfe diese Frage auf, ohne sie zu beantworten.

VIII.

Die Beweise für das Prinzip der Induktion.

Prüfen wir nunmehr die angeblichen Beweise für das Prinzip der Induktion, insbesondere diejenigen von Whitehead und von Burali-Forti.

Wir beginnen mit dem Beweise von Whitehead und benutzen dabei einige neue Bezeichnungen, die Russell in einer neueren Abhandlung passend eingeführt hat.

Als rekurrente Klasse bezeichnen wir jede Klasse von Zahlen, welche die Null enthält, und welche die Zahl $n + 1$ enthält, wenn sie die Zahl n enthält.

Als induktive Zahl bezeichnen wir jede Zahl, welche allen rekurrenten Klassen angehört.

Unter welcher Bedingung ist diese letztere Definition, die eine wesentliche Rolle in dem Beweise von Whitehead spielt, „prädikativ" und folglich annehmbar?

Nach dem vorhergehenden muß man unter allen rekurrenten Klassen alle diejenigen Klassen verstehen, für deren Definition der Begriff der induktiven Zahl nicht in Betracht kommt. Anderenfalls gerät man wieder in den circulus vitiosus, der die Antinomien erzeugt hat.

Whitehead hat aber diese Vorsicht nicht angewandt.

Seine Schlußweise ist folglich fehlerhaft; es ist dieselbe, die zu den Antinomien geführt hat; sie war unberechtigt, wo sie falsche Resultate ergab; sie bleibt unberechtigt, auch wenn sie zufällig einmal zu einem richtigen Resultat führt.

Eine Definition, die einen circulus vitiosus enthält, definiert nichts. Man könnte sagen: „welchen Sinn man auch unserer Definition beilegt, sicher gehört doch wenigstens die Null zur Klasse der induktiven Zahlen", darauf ist zu erwidern, daß es sich nicht darum handelt, ob diese Klasse leer ist, sondern ob man sie streng begrenzen kann. Eine

„nicht-prädikative“ Klasse ist nicht eine leere Klasse, sondern eine Klasse, deren Begrenzung unbestimmt ist.

Ich brauche kaum hinzuzufügen, daß dieser besondere Einwurf die allgemeinen Einwürfe bestehen läßt, welche auf alle derartigen Beweise anwendbar sind.

IX.

In seinem Aufsatze „Le Classi finite“ (Atti di Torino, t. XXXII) hat Burali-Forti einen anderen Beweis gegeben. Er benutzt dabei die folgenden beiden Postulate:

Das erste sagt aus, daß immer mindestens eine unendliche Klasse existiert.

Das zweite lautet folgendermaßen:

$$u \varepsilon K(K - \iota \Lambda) \cdot \supset \cdot u < v'u.$$

Das erste Postulat ist durchaus nicht evidenter als das zu beweisende Prinzip; das zweite Postulat ist nicht nur nicht evident, sondern sogar falsch, wie Whitehead gezeigt hat, wie übrigens auch der jüngste Anfänger auf den ersten Blick erkennen würde, wenn das Axiom in einer verständlichen Sprache ausgesprochen wäre; es bedeutet nämlich folgendes: die Anzahl der Kombinationen, die man mit mehreren Dingen bilden kann, ist kleiner als die Anzahl dieser Dinge.

X.

Das Axiom von Zermelo.

In einem berühmt gewordenen Beweise stützt sich Zermelo auf das folgende Axiom:[60])

„In einer beliebigen Menge (selbst in einer jeden Menge von Mengen) können wir immer ein Element willkürlich herausgreifen (selbst dann, wenn diese Menge von Mengen eine unendliche Anzahl von Mengen enthält).“ Man hatte dieses Axiom schon unzählig oft angewandt, ohne es auszusprechen; seitdem es aber ausgesprochen war, wurde es angezweifelt. Einige Mathematiker, wie z. B. Borel, ver-

warfen es gänzlich, andere bewunderten es. In seinem letzten Aufsatze beschäftigt sich Russell mit demselben.

Er kommt zu keinem endgültigen Resultate; die von ihm angestellten Betrachtungen sind indessen sehr anregend.

Hier sei ein anschauliches Beispiel gegeben: nehmen wir an, wir hätten ebenso viele Stiefelpaare als es ganze Zahlen gibt, so daß wir die Paare von 1 bis ∞ numerieren können; wie viele Stiefel haben wir dann? Ist die Anzahl der Stiefel gleich der Anzahl der Paare? Offenbar, wenn in jedem Paare der rechte Stiefel von dem linken zu unterscheiden ist; man braucht ja nur dem rechten Stiefel des n^{ten} Paares die Nummer $2n - 1$ zu geben und dem linken Stiefel des n^{ten} Paares die Nummer $2n$. Die Antwort lautet aber verneinend, wenn der rechte Stiefel von dem linken nicht unterschieden werden kann, denn dann wird ein solches Verfahren unmöglich; es sei denn, daß man das Zermelosche Axiom annimmt, dann könnte man nämlich in jedem Paare willkürlich denjenigen Stiefel auswählen, den man als einen rechten Stiefel betrachten will.

XI.
Schlußfolgerungen.

Jeder Beweis, der wirklich auf den Grundlagen der analytischen Logik beruht, setzt sich aus einer Folge von Sätzen zusammen: die einen dienen als Voraussetzungen und sind Identitäten oder Definitionen; die anderen werden aus den ersteren allmählich abgeleitet; obgleich das Band zwischen jedem Satze und dem folgenden unmittelbar ersichtlich ist, übersieht man auf den ersten Blick doch nicht, wie man vom ersten Satze zum letzten gelangte, und kommt deshalb in Versuchung, diesen als eine neue Wahrheit zu betrachten. Ersetzt man jedoch die verschiedenen in ihm vorkommenden Ausdrücke durch ihre Definitionen und führt dieses Verfahren soweit als irgend möglich durch, so bleiben schließlich nur Identitäten übrig, und alles reduziert sich auf eine

ungeheure Tautologie. Die Logik bleibt deshalb unfruchtbar, es sei denn, daß sie durch die Intuition befruchtet wird.

In diesem Sinne habe ich mich schon früher ausgesprochen[61]); die Logistiker bekennen sich zum Gegenteil und glauben dasselbe bewiesen zu haben, indem sie tatsächlich neue Wahrheiten ableiteten. Aber durch welchen Mechanismus gelang ihnen dies?

Wenn sie auf ihre Schlußweisen das von mir soeben beschriebene Verfahren anwenden, d. h. wenn sie die definierten Ausdrücke durch ihre Definitionen ersetzen, weshalb kommen sie dann nicht zu bloßen Identitäten, wie bei den gewöhnlichen Schlußweisen? Deshalb nicht, weil dies Verfahren für sie nicht anwendbar ist. Und weshalb ist es nicht anwendbar? Weil ihre Definitionen nicht prädikativ sind und somit jenen verborgenen circulus vitiosus enthalten, den ich oben erwähnt habe; die nicht-prädikativen Definitionen können nicht an Stelle des definierten Ausdrucks gesetzt werden. Deshalb ist die Logistik nicht nur unfruchtbar, sondern sie erzeugt überdies die Antinomien.

Der Glaube an das aktual Unendliche hat diese nicht-prädikativen Definitionen entstehen lassen. Zur näheren Erklärung bemerke ich das Folgende: in diesen Definitionen kommt das Wort alle vor, wie man in den oben angeführten Beispielen sieht. Das Wort alle hat einen vollständig klaren Sinn, wenn es sich um eine endliche Anzahl von Dingen handelt; ist aber die Anzahl der Dinge unendlich, so müßte es ein aktual Unendliches geben, wenn das Wort alle auch dann einen Sinn haben soll. Anderenfalls können alle diese Dinge nicht als vor ihrer Definition gegeben aufgefaßt werden, und wenn dann die Definition eines Begriffes N von allen Dingen A abhängt, so kann sie einen circulus vitiosus enthalten, falls es unter den Dingen A solche gibt, die sich nur unter Benutzung des Begriffes N selbst definieren lassen.

Die Regeln der formalen Logik drücken einfach die Eigenschaften aller möglichen Klassifikationen aus; sie sind aber nur anwendbar, wenn diese Klassifikationen unveränderlich sind, und wenn man sie im Laufe der logischen Entwicklung nicht zu modifizieren braucht. Hat man nur eine endliche Anzahl von Dingen zu klassifizieren, so kann man die gemachten Klassifikationen leicht unverändert beibehalten. Sind aber die Dinge in unbegrenzter Anzahl vorhanden, d. h. ist man andauernd der Gefahr ausgesetzt, neue und unvorhergesehene Dinge auftauchen zu sehen, so kann es vorkommen, daß das Auftauchen eines neuen Dinges zur Abänderung der gemachten Klassifikationen nötigt, und deshalb ist man der Gefahr der Antinomien ausgesetzt.

Das aktual Unendliche gibt es nicht; das haben die Cantorianer vergessen, und deshalb gerieten sie in Widersprüche. Zwar hat der Cantorismus der Mathematik auch nützliche Dienste geleistet, aber nur, wenn man ihn auf ein wirkliches Problem anwandte, bei dem alle einzelnen Ausdrücke klar definiert waren; dann konnte man ruhig und sicher vorwärts schreiten.

Die Logistiker haben obigen Satz ebenso vergessen wie die Cantorianer, und sie begegneten denselben Schwierigkeiten. Es muß aber noch aufgeklärt werden, ob sie durch Zufall sich in diesen Weg verrannten, oder ob das für sie eine Notwendigkeit war.

Für mich ist die Frage nicht zweifelhaft: der Glaube an das aktual Unendliche ist für die Russellsche Logistik wesentlich. Gerade dadurch unterscheidet sich diese von der Hilbertschen Logistik. Hilbert stellt sich auf den Standpunkt der allgemeinen Erweiterung, und zwar gerade, um die Cantorschen Antinomien zu vermeiden; Russell stellt sich auf den Standpunkt der Umfassung. Für ihn ist folglich das Genus früher als die Art und das summum genus früher als alles. Das ginge, wenn das summum genus endlich wäre; es ist aber unendlich, und deshalb muß Russell

das Unendliche vor dem Endlichen postulieren, d. h. das Unendliche als aktual betrachten.

Auch nicht nur die Klassen sind unendlich; wenn wir vom genus zur Art übergehn, indem wir den Begriff durch neue Bedingungen beschränken, so sind auch diese Bedingungen in unendlicher Zahl vorhanden. Im allgemeinen drücken sie nämlich aus, daß das betrachtete Ding diese oder jene Beziehung zu allen Dingen einer unendlichen Klasse besitzt.

Doch das sind alte Geschichten. Russell hat die Gefahr bemerkt und schickt sich an, ihr zu begegnen. Er geht daran, alles zu ändern; und er führt nicht nur neue Prinzipien ein, durch welche früher nicht erlaubte Operationen zugelassen werden; sondern er verbietet auch Operationen, die er früher für zulässig hielt. Er begnügt sich nicht damit hochzustellen, was er früher verdammt hatte, sondern er verdammt jetzt, was er früher hochgestellt hatte, und das ist noch bedenklicher. Er fügt seinem Gebäude nicht einen neuen Seitenbau an, sondern er untergräbt die Fundamente seines Gebäudes.

Die alte Logistik ist abgetan, und das so sehr, daß die zigzag theory und die ‚no class‘ theory sich bereits um die Nachfolgerschaft streiten. Um die neue Logistik zu beurteilen, müssen wir warten, bis sie existiert.

Drittes Buch.

Die neue Mechanik.

Erstes Kapitel.

Mechanik und Radium.

I.

Einleitung.

Die allgemeinen Prinzipien der Dynamik, welche seit Newton die Grundlage der Physik bildeten, schienen unerschütterlich festzustehen; sind wir jetzt im Begriffe, sie zu verlassen oder wenigstens sie wesentlich zu modifizieren? Diese Frage wird seit einigen Jahren vielfach aufgeworfen. Die Entdeckung des Radiums, meint man, hätte die bisher am festesten gegründeten Dogmen der Wissensehaft umgestoßen, einerseits nämlich das Dogma von der Unmöglichkeit, die Metalle in einander zu verwandeln, andrerseits die grundlegenden Postulate der Mechanik. Vielleicht hat man sich zu sehr beeilt, diese neuen Tatsachen als definitiv festgestellt anzuerkennen und unsere früheren Götterbilder umzustürzen; vielleicht sollte man zahlreichere und entscheidendere Versuche abwarten, ehe man Partei ergreift. Deshalb ist es jedoch nicht weniger notwendig, schon heute die neuen Theorien kennen zu lernen, sowie die sehr beachtenswerten Gründe, auf die sie sich stützen.

Wiederholen wir zunächst, worin die bisher als grundlegend betrachteten Prinzipien bestehen:

A. Die Bewegung eines isolierten materiellen Punktes, der keiner äußeren Kraft unterworfen ist, erfolgt geradlinig und gleichförmig; darin besteht das Trägheitsprinzip: keine Beschleunigung ohne Kraft.

B. Die Beschleunigung eines beweglichen Punktes hat dieselbe Richtung, wie die Resultante aller Kräfte, denen dieser Punkt unterworfen ist; sie ist gleich dem Quotienten dieser Resultate, dividiert durch einen Koeffizienten, den man als Masse des beweglichen Punktes bezeichnet.

Die so definierte Masse eines beweglichen Punktes ist eine Konstante; sie hängt nicht von der Geschwindigkeit ab, die der Punkt erlangt hat; für eine Kraft, die der Geschwindigkeit parallel wirkt und deshalb die Bewegung des Punktes nur zu beschleunigen oder zu verzögern vermag, ist sie dieselbe wie für eine Kraft, die vertikal zu dieser Geschwindigkeit wirkt und deshalb die Bewegung nach rechts oder links abzulenken, d. h. die Bahnkurve zu krümmen bestrebt ist.

C. Alle Kräfte, denen ein materieller Punkt unterworfen ist, rühren von der Einwirkung anderer materieller Punkte her; sie hängen nur ab von den Lagen und den relativen Geschwindigkeiten dieser anderen materiellen Punkte.

Durch Kombination der beiden Prinzipe B und C gelangt man zu dem Prinzipe der relativen Bewegung, nach welchem die Bewegungsgesetze eines Systems dieselben sind, wenn man das System auf feste Achsen bezieht, und wenn man das System auf bewegliche Achsen bezieht, die selbst eine geradlinige und gleichförmige Translation ausführen; auf Grund dieses Prinzips ist es unmöglich, die absolute Bewegung eines Systems von der relativen Bewegung desselben in bezug auf derartig bewegte Achsen zu unterscheiden.

D. Wenn ein materieller Punkt A auf einen andern materiellen Punkt B einwirkt, so wirkt umgekehrt der Punkt B auf A zurück, und diese gegenseitigen Einwirkungen werden durch zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gemessen. Das ist das Prinzip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung oder, kurz gesagt, das Prinzip der Reaktion.

Die astronomischen Beobachtungen und die gewöhnlichen physikalischen Erscheinungen scheinen eine vollständige,

konstante und sehr genaue Bestätigung für diese Prinzipien geliefert zu haben. Das ist richtig, sagt man jetzt, aber nur deshalb, weil man stets mit sehr kleinen Geschwindigkeiten zu tun hat; Merkur z. B., der sich von allen Planeten am schnellsten bewegt, durchläuft in einer Sekunde nur hundert Kilometer. Würde die Bewegung dieses Sternes denselben Gesetzen gehorchen, wenn sie tausendmal schneller erfolgte? Wie man sieht, braucht man sich noch nicht gerade zu beunruhigen; wie groß auch die Fortschritte des Automobilismus sein mögen, es wird noch lange Zeit vergehen, ehe man darauf verzichten muß, die klassischen Prinzipien der Dynamik auf unsere Maschinen anzuwenden.

Wie ist es aber gelungen, Geschwindigkeiten herzustellen, die tausendmal größer sind als die Geschwindigkeit des Merkur, und die z. B. dem zehnten oder dritten Teile der Lichtgeschwindigkeit gleichkommen, oder sich dieser Geschwindigkeit noch mehr nähern? Das gelang mit Hilfe der Kathodenstrahlen und der Strahlen des Radium.

Das Radium sendet bekanntlich drei Arten von Strahlen aus, die man mit den drei Buchstaben α, β, γ des griechischen Alphabets bezeichnet; wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird, handelt es sich im folgenden immer um die Strahlen β, die den Kathodenstrahlen analog sind.

Nach der Entdeckung der Kathodenstrahlen standen sich zwei verschiedene Theorien gegenüber: Crookes schrieb die Erscheinungen einem wirklichen Bombardement der Moleküle zu; Hertz sah den Grund in gewissen besonderen Schwingungen des Äthers. So wiederholte sich der alte Streit, der vor etwa einem Jahrhundert die Physiker hinsichtlich der Lichttheorie in zwei Parteien spaltete; Crookes nahm die für das Licht aufgegebene Emissionstheorie wieder auf; Hertz hielt an der Wellentheorie fest. Die Tatsachen scheinen Crookes recht zu geben.

Man erkannte, daß die Kathodenstrahlen eine negative elektrische Ladung mit sich führen; sie werden sowohl durch

ein magnetisches, als durch ein elektrisches Feld abgelenkt; und diese Ablenkungen sind genau die gleichen, wie sie dieselben Felder auf Projektile ausüben würden, die sich mit sehr großer Geschwindigkeit bewegen und stark elektrisch geladen sind. Diese Ablenkungen hängen von zwei Größen ab: einerseits von der Geschwindigkeit, andererseits von dem Verhältnisse der elektrischen Ladung des Projektils zu seiner Masse; weder den absoluten Wert dieser Masse noch denjenigen der Ladung kann man bestimmen, sondern nur das Verhältnis von Masse und Ladung; wenn man nämlich die Ladung und die Masse gleichzeitig verdoppelt, ohne die Geschwindigkeit zu ändern, so verdoppelt man auch die Kraft, welche das Projektil abzulenken strebt; da aber die Masse ebenfalls verdoppelt ist, so sind die zu beobachtenden Größen, nämlich die Beschleunigung und die Ablenkung nicht geändert. Die Beobachtung der beiden Ablenkungen (durch das elektrische und durch das magnetische Feld) liefert uns also zwei Gleichungen, um die beiden Unbekannten zu bestimmen. Man findet eine Geschwindigkeit von 10 000 bis 30 000 Kilometer pro Sekunde; das Verhältnis der Ladung zur Masse ergibt sich als sehr groß. Man kann es mit dem entsprechenden Verhältnisse beim Wasserstoff-Ion in der Elektrolyse vergleichen; man findet dann, daß in den Kathodenstrahlen ein Projektil ungefähr tausendmal mehr Elektrizität mit sich führt, als eine gleich große Masse Wasserstoff in einem Elektrolyten.[62])

Zur näheren Begründung dieser Anschauung müßte man noch eine direkte Messung dieser Geschwindigkeit vornehmen und sie sodann mit der berechneten Geschwindigkeit vergleichen. Ältere Versuche von J. J. Thomson hatten hundertfach zu schwache Resultate ergeben; aber sie waren gewissen Fehlerquellen unterworfen. Die Frage wurde von Wiechert in einer Versuchsanordnung wieder aufgenommen, bei der man die Hertzschen Oszillationen benutzt; die gefundenen Resultate waren wenigstens in der Größen-

ordnung mit der Theorie in Übereinstimmung; es wäre von größestem Interesse, diese Versuche zu wiederholen. Wie dem aber auch sei, jedenfalls scheint die Schwingungstheorie nicht imstande zu sein, von der Gesamtheit der Tatsachen Rechenschaft zu geben.

Die Ausführung derselben Rechnungen für β-Strahlen des Radiums ergaben noch beträchtlich größere Geschwindigkeiten: 100 000 bis 200 000 Kilometer oder noch mehr. Diese Geschwindigkeiten überschreiten alles, was wir bisher kennen. Das Licht allerdings legt in der Sekunde 300 000 Kilometer zurück, wie man seit langem weiß; aber dabei handelt es sich nicht um einen Transport von Materie; nimmt man dagegen für die Kathodenstrahlen die Emissionstheorie an, so müßte es materielle Moleküle geben, die sich tatsächlich mit der genannten Geschwindigkeit bewegten, und es wird deshalb nötig zu untersuchen, ob die gewöhnlichen Gesetze der Mechanik auf sie noch anwendbar sind.

II.

Longitudinale und transversale Masse.

Bei den elektrischen Strömen treten bekanntlich die Erscheinungen der Induktion auf, insbesondere diejenigen der Selbstinduktion. Wenn die Intensität eines Stromes wächst, so entsteht eine elektromotorische Kraft durch Selbstinduktion, und sie wirkt dem Strome entgegen; wenn dagegen der Strom abnimmt, so sucht die durch Selbstinduktion entstehende elektromotorische Kraft den Strom in seiner früheren Stärke zu erhalten. Die Selbstinduktion widersetzt sich also einer jeden Veränderung der Stromintensität, ebenso wie in der Mechanik die Trägheit eines Körpers sich jeder Veränderung seiner Geschwindigkeit widersetzt. Die Selbstinduktion wirkt genau wie die Trägheit. Alles verhält sich so, als wenn der Strom sich nicht entwickeln könnte, ohne den umgebenden Äther in Bewegung zu setzen, und als wenn die Trägheit dieses Äthers dahin strebte, die Strom-

intensität konstant zu erhalten. Um den Strom entstehen zu lassen, muß man diese Trägheit überwinden, man muß sie ebenfalls überwinden, um den Strom aufhören zu lassen.

Ein Kathodenstrahl ist ein Regen von Projektilen, die mit negativer Elektrizität geladen sind; er kann wie ein elektrischer Strom behandelt werden. Auf den ersten Blick unterscheidet sich dieser Strom von den gewöhnlichen Leitungsströmen, bei denen die Materie unbeweglich bleibt, während die Elektrizität durch die Materie hindurchfließt. Er ist ein Konvektionsstrom, bei dem die Elektrizität an einen materiellen Träger gebunden ist und mit diesem Träger fortbewegt wird. Rowland hat gezeigt, daß die Konvektionsströme dieselben magnetischen Wirkungen hervorbringen wie die Leitungsströme; sie müssen also auch dieselben Induktionswirkungen erzeugen. Anderenfalls nämlich wäre das Prinzip von der Erhaltung der Energie verletzt; überdies haben Crémieu und Pender eine Methode angewandt, bei der diese Induktionswirkungen direkt in die Erscheinung treten.[68])

Wenn die Geschwindigkeit eines Kathodenteilchens (eines Korpuskels) sich ändert, so ändert sich gleichzeitig die Intensität des entsprechenden Stromes; und die Selbstinduktion sucht dahin zu wirken, diese Änderung wieder aufzuheben. Die Korpuskeln müssen folglich eine doppelte Trägheit besitzen: zunächst ihre eigene Trägheit und außerdem die scheinbare Trägheit, welche auf der Selbstinduktion beruht, indem letztere dieselben Wirkungen hervorbringt, wie die eigentliche Trägheit. Die Korpuskeln haben demnach eine scheinbare Gesamtmasse, die sich aus ihrer wirklichen Masse und einer fiktiven Masse elektromagnetischen Ursprungs zusammensetzt. Die Rechnung zeigt, daß diese fiktive Masse mit der Geschwindigkeit variiert, und daß die Kraft der durch die Selbstinduktion erzeugten Trägheit nicht die gleiche ist, wenn die Geschwindigkeit des Korpuskels vergrößert oder verkleinert wird, als wenn die Ge-

schwindigkeit in ihrer Richtung geändert wird; dasselbe muß auch für die Kraft der scheinbaren Gesamtträgheit gelten.

Die scheinbare Gesamtmasse ist deshalb nicht dieselbe, wenn die an dem Korpuskel angreifende Kraft parallel der Geschwindigkeit ist und die Bewegung zu beschleunigen sucht, als wenn sie senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt und deren Richtung zu ändern sucht. Man muß folglich die longitudinale Gesamtmasse von der transversalen Gesamtmasse unterscheiden. Beide Gesamtmassen hängen von der Geschwindigkeit ab.[64]) Das sind die Resultate der theoretischen Arbeiten von Abraham.

Schon im vorhergehenden Kapitel sprachen wir von den hier zu machenden Messungen; was bestimmt man nun durch die Messung dieser beiden Ablenkungen? Einerseits die Geschwindigkeit, andererseits das Verhältnis der Ladung zur transversalen Gesamtmasse. Wie soll man in dieser Gesamtmasse den Anteil der wirklichen Masse von dem Anteil der fiktiven elektromagnetischen Masse unterscheiden? Wenn wir nur die eigentlichen Kathodenstrahlen hätten, so könnten wir daran nicht denken; glücklicherweise haben wir auch die Radiumstrahlen, die wesentlich schneller sind, wie wir schon oben erwähnten. Diese Strahlen sind nicht alle von gleicher Natur und verhalten sich unter der Einwirkung eines elektrischen und magnetischen Feldes nicht gleichmäßig. Man findet, daß die elektrische Ablenkung eine Funktion der magnetischen Ablenkung ist, und indem man Radiumstrahlen, die der Einwirkung beider Felder ausgesetzt waren, auf einer empfindlichen Platte auffängt, kann man die Kurve photographieren, welche die Beziehung zwischen diesen beiden Ablenkungen darstellt. Das hat Kaufmann getan und daraus die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und dem Verhältnisse der Ladung zur scheinbaren Gesamtmasse abgeleitet; dieses Verhältnis nennen wir im folgenden ε.

Man könnte voraussetzen, daß verschiedene Arten von Strahlen existieren, von denen jeder durch eine bestimmte

Geschwindigkeit, eine bestimmte Ladung und eine bestimmte Masse charakterisiert wird. Eine solche Hypothese ist indessen wenig wahrscheinlich; weshalb sollten z. B. alle Korpuskeln von gleicher Masse immer dieselbe Geschwindigkeit annehmen? Es liegt näher vorauszusetzen, daß Ladung und wirkliche Masse für alle Projektile gleich sind, und daß diese sich nur durch ihre Geschwindigkeit unterscheiden. Wenn das Verhältnis ε eine Funktion der Geschwindigkeit ist, so variiert deshalb doch die wirkliche Masse nicht mit der Geschwindigkeit; obgleich die wirkliche Masse nicht von ihr abhängt und konstant ist, muß die scheinbare Gesamtmasse, die allein beobachtet werden kann, von der Geschwindigkeit abhängen, denn von letzterer hängt die fiktive elektromagnetische Masse ab.

Die Rechnungen Abrahams lehren uns das Gesetz kennen, nach welchem die fiktive Masse als Funktion der Geschwindigkeit variiert; die Versuche Kaufmanns lehren uns das Gesetz für die Variation der Gesamtmasse kennen. Der Vergleich beider Gesetze gestattet uns also das Verhältnis der wirklichen Masse zur Gesamtmasse zu bestimmen.

Dieser Methode hat sich Kaufmann zur Bestimmung des fraglichen Verhältnisses bedient. Das Resultat ist vollkommen überraschend: die wirkliche Masse ist gleich Null.

Man wird so zu ganz unerwarteten Vorstellungen geführt. Was man für die Kathodenkorpuskeln gezeigt hat, hat man auf alle Körper ausgedehnt. Was wir Masse nennen, soll nur eine scheinbare Existenz haben; jede Trägheit soll elektromagnetischen Ursprungs sein. Aber dann wäre die Masse nicht mehr konstant, würde sich vielmehr mit der Geschwindigkeit ändern; aber sie bliebe doch wesentlich konstant für Geschwindigkeiten, die bis zu 1000 Kilometer in der Sekunde gehen können, würde sodann wachsen und würde für die Lichtgeschwindigkeit unendlich werden. Die transversale Masse würde der longitudinalen Masse nicht mehr

gleich sein: beide würden nur ungefähr einander gleich sein, solange die Geschwindigkeit nicht zu groß wird. Das Prinzip B der Mechanik hätte keine Gültigkeit mehr.

III.
Die Kanalstrahlen.

Auf unserem jetzigen Standpunkte wird dieser Schluß voreilig erscheinen. Kann man auf die ganze Materie anwenden, was man nur für diese leichten Korpuskeln bewiesen hat, die nur eine Emanation der Materie und vielleicht selbst nicht wirkliche Materie sind? Ehe wir auf diese Frage eingehen, müssen wir uns mit einer andern Art von Strahlen beschäftigen; ich meine die von Goldstein entdeckten Kanalstrahlen. Neben den mit negativer Elektrizität geladenen Kathodenstrahlen sendet die Kathode auch die mit positiver Elektrizität geladenen Kanalstrahlen aus. Die letzteren werden im allgemeinen von der Kathode nicht abgestoßen, sie bleiben deshalb auf die unmittelbare Nachbarschaft der Kathode beschränkt, wo sie die „gemsfarbene Schicht" bilden, die man nicht leicht wahrnehmen kann; wenn aber die Kathode mit Löchern versehen wird, und wenn sie die Glasröhre fast ganz abschließt, so breiten sich die Kanalstrahlen von der Kathode nach rückwärts aus (also in entgegengesetztem Sinne wie die Kathodenstrahlen), und es wird möglich sie zu studieren. Auf diese Weise hat man ihre positive Ladung feststellen und zeigen können, daß die magnetischen und elektrischen Ablenkungen ebenso wie bei den Kathodenstrahlen vorhanden sind, wenn auch sehr viel schwächer.[65])

Das Radium sendet gleichfalls Strahlen aus, die den Kanalstrahlen analog sind und verhältnismäßig sehr stark absorbiert werden; man nennt sie die Strahlen α.

Wie bei den Kathodenstrahlen kann man die beiden Ablenkungen messen und daraus die Geschwindigkeit und das Verhältnis ε bestimmen. Die Resultate sind weniger kon-

stant als bei den Kathodenstrahlen; die Geschwindigkeit und das Verhältnis ε sind kleiner; die positiven Korpuskeln haben also eine geringere Ladung als die negativen; oder wenn man die näherliegende Voraussetzung macht, daß die Ladungen absolut gleich bei entgegengesetzten Zeichen sind: die positiven Korpuskeln sind bedeutend größer als die negativen. Diese teils positiv, teils negativ geladenen Korpuskeln haben den Namen Elektronen erhalten.

IV.

Die Lorentzsche Theorie.

Die Elektronen bezeugen ihre Existenz nicht nur in diesen Strahlen, in denen sie uns mit ganz außerordentlicher Geschwindigkeit bewegt erscheinen; wir begegnen ihnen noch in den verschiedensten anderen Gebieten, und ihrer werden wir bedürfen, um uns von den wichtigsten Erscheinungen der Optik und der Elektrizität Rechenschaft zu geben. Das glänzende theoretische Gebäude, von dem wir jetzt zu sprechen haben, verdankt man Lorentz.

Die Materie wird ganz von Elektronen gebildet, die außerordentlich stark geladen sind, und wenn sie uns neutral vorkommt, so liegt das daran, daß die entgegengesetzten Ladungen dieser Elektronen sich aufheben. Man kann sich z. B. eine Art von Sonnensystem vorstellen, das von einem großen positiven Elektron gebildet wird, um welches zahlreiche kleine Planeten gravitieren; letztere wären dann negative Elektronen, die durch die entgegengesetzte elektrische Ladung des zentralen Elektrons angezogen werden. Die negativen Ladungen dieser Planeten kompensieren die positive Ladung dieser Sonne, und die algebraische Summe aller Ladungen wird gleich Null.

Alle diese Elektronen schwimmen im Äther. Der Äther ist überall sich selbst gleich, und die Störungen pflanzen sich in ihm nach denselben Gesetzen fort wie die Licht-

schwingungen oder die Hertzschen Schwingungen im leeren Raume. Außer Äther und Elektronen gibt es nichts. Wenn eine Lichtquelle in einen Teil des Äthers eindringt, in dem sich sehr viele Elektronen befinden, so setzen sich letztere unter dem Einflusse der Ätherstörung in Bewegung und reagieren ihrerseits auf den Äther. Auf diese Weise ergibt sich die Erklärung für die Refraktion, die Dispersion, die Doppelbrechung und die Absorption. Wenn andererseits ein Elektron sich aus irgendeiner Ursache in Bewegung setzt, so stört es den umgebenden Äther und veranlaßt so die Entstehung von Lichtwellen; dadurch läßt sich die Emission des Lichtes durch glühende Körper erklären.

In gewissen Körpern, den Metallen z. B., gibt es unbewegliche Elektronen, und zwischen ihnen zirkulieren bewegliche Elektronen, die in ihrer Bewegung sonst vollkommen frei sind, nur nicht aus der Oberfläche heraustreten dürfen, welche den Körper vom leeren Raume oder von der Luft, oder von irgendeinem anderen nicht-metallischen Körper trennt. Im Innern des metallischen Körpers verhalten sich diese beweglichen Elektronen so wie nach der kinetischen Gastheorie die Moleküle eines Gases im Innern des Gefäßes, in welchem das Gas eingeschlossen ist. Unter dem Einflusse einer Potentialdifferenz suchen sich die beweglichen negativen Elektronen alle nach einer Seite, die beweglichen positiven Elektronen alle nach der andern Seite zu bewegen. So entsteht der elektrische Strom, und deshalb sind diese Körper Leiter. Gemäß der Analogie mit der kinetischen Gastheorie müssen die Geschwindigkeiten unserer Elektronen um so größer werden, je höher die Temperatur des Körpers steigt. Wenn dann eines dieser beweglichen Elektronen bis zur Oberfläche eines metallischen Körpers gelangt, die es nicht überschreiten kann, so wird es wie ein Billardball, der die Bande berührt hat, zurückgeworfen, und die Richtung seiner Geschwindigkeit erleidet eine plötzliche Änderung. Wenn aber ein Elektron seine

Richtung ändert, so wird es, wie wir oben gesehen haben, die Quelle einer Lichtwelle, und deshalb sind die heißen Metalle leuchtend. In anderen Körpern, den durchsichtigen Körpern und in den sogenannten Dielektrica, haben die beweglichen Elektronen eine viel geringere Bewegungsfreiheit. Sie verhalten sich als wenn sie mit den sie anziehenden festen Elektronen eng verbunden wären. Je mehr sie sich von diesen entfernen, desto größer wird die Anziehung, die sie an ihren Platz zurückführt. Sie können daher nur wenig von der Ruhelage abweichen; sie können nicht zirkulieren, sondern nur um ihre mittlere Lage oszillieren. Deshalb sind diese Körper Nichtleiter; übrigens sind sie meistens auch durchsichtig und lichtbrechend, denn die Lichtschwingungen teilen sich den beweglichen Elektronen, die ebenfalls Oszillationen ausführen können, mit, und daraus entsteht jene Störung, die als Lichtbrechung bezeichnet wird.[66])

Die Einzelheiten der Rechnungen kann ich hier nicht mitteilen; ich beschränke mich darauf hervorzuheben, daß diese Theorie von allen bekannten Tatsachen Rechenschaft gibt, und daß sie auch neue Tatsachen, z. B. das Zeemansche Phänomen, voraussehen ließ.

V.
Folgerungen für die Mechanik.

Wir stehen nun vor zwei verschiedenen Hypothesen:

1. Die positiven Elektronen besitzen eine wirkliche Masse, die viel größer ist als ihre fiktive elektromagnetische Masse; die negativen Elektronen haben keine wirkliche Masse. Man könnte sogar annehmen, daß es außer diesen beiden Arten von Elektronen noch neutrale Atome gäbe, die keine andere als ihre wirkliche Masse besitzen. In dem Falle wird die Mechanik nicht weiter berührt, wir brauchen ihre Gesetze nicht weiter zu untersuchen; die wirkliche Masse ist konstant, nur werden die Bewegungen durch die Wirkungen der Selbstinduktion gestört, wie man das schon lange wußte;

diese Störungen sind übrigens nahezu verschwindend, ausgenommen bei den negativen Elektronen, welche aber nicht zur eigentlichen Materie gehören, da sie keine wirkliche Masse besitzen.

2. Man kann andererseits voraussetzen, daß es keine neutralen Atome gibt, und daß die positiven Elektronen eine wirkliche Masse ebensowenig besitzen wie die negativen Elektronen. Dann aber verschwindet die wirkliche Masse ganz, und das Wort Masse hat entweder überhaupt keinen Sinn mehr, oder es muß die fiktive elektromagnetische Masse bezeichnen; in dem Falle wäre die Masse nicht mehr konstant, und die transversale Masse wäre nicht mehr gleich der longitudinalen Masse, die Grundlagen der Mechanik wären also erschüttert.[67])

Zunächst noch einige Worte zur Aufklärung. Wir sagten, daß bei gleicher Ladung die Gesamtmasse eines positiven Elektrons viel größer ist als diejenige eines negativen Elektrons. Zur Erklärung dieser Differenz liegt es nahe anzunehmen, daß das positive Elektron neben seiner fiktiven Masse eine beträchtliche wirkliche Masse besitzt; durch diese Annahme würde man auf die erste Hypothese zurückkommen. Man kann aber ebensogut annehmen, die wirkliche Masse sei bei beiden Arten von Elektronen gleich Null, die fiktive Masse des positiven Elektrons aber bedeutend größer, weil dieses Elektron bedeutend kleiner zu denken ist als das negative. Ich sage mit Absicht: „bedeutend kleiner". Bei dieser zweiten Hypothese nämlich ist die Trägheit ausschließlich elektromagnetischen Ursprungs; sie reduziert sich auf die Trägheit des Äthers; die Elektronen an sich selbst sind nichts, sie sind nur Löcher im Äther, in deren Umgebung der Äther gestört ist; je kleiner diese Löcher sind, um so mehr Äther ist in ihrer Umgebung vorhanden, um so größer wird folglich die Trägheit des Äthers.

Wie soll man nun zwischen diesen beiden Hypothesen entscheiden? Etwa indem man mit den Kanalstrahlen ver-

fährt, wie es Kaufmann mit den β-Strahlen getan hat? Das ist unmöglich, dazu ist die Geschwindigkeit dieser Strahlen viel zu gering. Soll sich nun ein jeder nach seinem Temperament entscheiden, die Konservativen nach der einen Richtung, die Freunde des Neuen nach der anderen gehen? Vielleicht, um aber den Gedankengang der Neuerer richtig zu verstehen, muß man noch andere Überlegungen in Betracht ziehen.

Zweites Kapitel.
Mechanik und Optik.

I.
Die Aberration.

Die von Bradley entdeckte Erscheinung der Aberration ist allgemein bekannt. Das von einem Sterne ausgesandte Licht braucht eine gewisse Zeit, um die Achse eines Fernrohres zu durchlaufen; während dieser Zeit wird das Fernrohr von der Bewegung der Erde mitgeführt, ändert also seinen Ort im Raume. Hätte man das Fernrohr in die wahre Richtung des Sternes eingestellt, so entstände dessen Bild an dem Punkte, wo sich das Fadenkreuz befindet, wenn das Licht bis zum Objektive gelangt ist, aber dies Fadenkreuz befindet sich nicht mehr an derselben Stelle, wenn das Licht die Ebene des Fadenkreuzes erreicht. Man müßte folglich das Fernrohr anders einstellen, um das Bild des Sternes auf das Fadenkreuz zurückzuführen. Daraus folgt, daß der Astronom das Fernrohr nicht in die Richtung der absoluten Geschwindigkeit des Lichtes einstellt, d. h. nicht auf den wahren Ort des Sternes richtet, sondern in der Richtung der relativen Geschwindigkeit des Lichtes im Verhältnis zur Erde, d. h. auf den sogenannten scheinbaren Ort des Sternes.

Die Geschwindigkeit des Lichtes ist bekannt; man könnte also glauben, daß wir in der Lage sind, die absolute Geschwindigkeit der Erde zu berechnen (auf das Wort „abso-

lut“ komme ich sofort noch zurück). Das geht aber nicht, wir kennen zwar den scheinbaren Ort des von uns beobachteten Sternes, aber nicht seinen wahren Ort: wir kennen nur die Größe der Geschwindigkeit des Lichtes, nicht ihre Richtung.

Wenn die absolute Geschwindigkeit der Erde geradlinig und gleichförmig wäre, so wären wir niemals auf die Erscheinung der Aberration aufmerksam geworden; aber die Geschwindigkeit ist veränderlich, sie setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der geradlinigen und gleichförmigen Geschwindigkeit des Sonnensystems und der veränderlichen Geschwindigkeit der Erde in bezug auf die Sonne. Hätten wir es nur mit der Geschwindigkeit des Sonnensystems, d. h. mit dem konstanten Teile, zu tun, so wäre die beobachtete Richtung unveränderlich. Der Ort, den man dann beobachten würde, heißt der scheinbare mittlere Ort des Sternes.

Berücksichtigt man gleichzeitig beide Teile der Erdgeschwindigkeit, so erhält man den scheinbaren wirklichen Ort des Sternes; derselbe beschreibt eine Ellipse um den scheinbaren mittleren Ort, und diese Ellipse beobachtet man.

Unter Vernachlässigung sehr kleiner Größen erkennt man, daß die Dimensionen dieser Ellipse nur von dem Verhältnisse der Geschwindigkeit der Erde in bezug auf die Sonne zu der Geschwindigkeit des Lichtes abhängen, und daß folglich nur die relative Geschwindigkeit der Erde in bezug auf die Sonne in Betracht kommt.

Aber halt! Dieses Resultat ist nicht streng richtig, es ist nur annähernd richtig, wir wollen die Annäherung noch etwas weiter treiben. Die Dimensionen der Ellipse hängen dann von der absoluten Geschwindigkeit der Erde ab. Durch Vergleichung der großen Achsen der Ellipsen für verschiedene Sterne hätten wir dann wenigstens theoretisch ein Mittel zur Bestimmung dieser absoluten Geschwindigkeit.

Das ist vielleicht weniger überraschend als es zuerst scheint; es handelt sich nämlich nicht um die Geschwindigkeit in bezug auf den absoluten leeren Raum sondern um die Geschwindigkeit in bezug auf den Äther, den man der Definition nach als in absoluter Ruhe befindlich betrachtet.

Dieses Mittel ist allerdings rein theoretisch. Tatsächlich ist die Aberration sehr gering; die möglichen Variationen der Aberrationsellipse sind noch geringer und müssen als Größen zweiter Ordnung behandelt werden, wenn wir die Aberration als Größe erster Ordnung betrachten: sie betragen ungefähr ein Tausendstel einer Bogensekunde und sind für unsere Instrumente absolut unwahrnehmbar. Wir werden weiterhin sehen, weshalb die hier gekennzeichnete Theorie zu verwerfen ist, und weshalb wir die absolute Geschwindigkeit selbst dann nicht bestimmen könnten, wenn unsere Instrumente tausendmal genauer wären!

Man könnte noch an ein anderes Mittel denken, und man hat auch wirklich daran gedacht. Im Wasser ist die Geschwindigkeit des Lichtes nicht dieselbe wie in der Luft; man könnte also die beiden scheinbaren Örter eines Sternes miteinander vergleichen, die sich ergeben, wenn man den Stern einmal durch ein mit Luft gefülltes Fernrohr und einmal durch ein mit Wasser gefülltes Fernrohr beobachtet. Das Resultat war negativ: die scheinbaren Gesetze der Reflexion und der Refraktion werden durch die Bewegung der Erde nicht geändert. Diese Erscheinung läßt zwei Erklärungen zu:

1. Man kann voraussetzen, daß der Äther nicht in Ruhe ist, daß er vielmehr durch die in Bewegung befindlichen Körper mitgeführt wird. Dann ist es nicht überraschend, wenn die Erscheinungen der Refraktion durch die Erdbewegung nicht beeinflußt werden, denn alles, Prisma, Fernrohr und Äther wird gleichzeitig in derselben Richtung translatorisch fortbewegt. Die Aberration selbst würde sich dann

durch eine Art von Brechung erklären, die an der Trennungsfläche des im interstellaren Raume ruhenden Äthers und des durch die Erdbewegung mitgeführten Äthers stattfindet. Auf dieser Hypothese (vollständiger Mitführung des Äthers) beruht die Hertzsche Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper.

2. Fresnel setzt dagegen voraus, daß der Äther im leeren Raume absolut ruht, daß er in der Luft nahezu absolut ruht, wie groß auch die Geschwindigkeit der Luft sei, und daß er von den brechenden Medien teilweise mitgeführt wird. Lorentz hat dieser Theorie eine befriedigendere Form gegeben. Nach ihm ist der Äther in Ruhe, und es bewegen sich nur die Elektronen; im leeren Raume, wo es sich nur um den Äther handelt, in der Luft, wo es sich fast nur um den Äther handelt, ist die Fortführung Null oder fast Null; in den brechenden Medien, wo die Störung teils durch die Vibrationen des Äthers, teils durch die Vibrationen der vom Äther beeinflußten Elektronen hervorgerufen wird, werden die Wellenbewegungen teilweise mitgeführt.

Zur Entscheidung zwischen den beiden Hypothesen haben wir den Versuch von Fizeau, der die Geschwindigkeit des Lichtes in ruhender und bewegter Luft, sowie in ruhendem und in bewegtem Wasser durch Messung der Interferenzfranzen bestimmte. Diese Versuche haben die Fresnelsche Hypothese der teilweisen Mitführung des Äthers bestätigt. Sie wurden mit gleichem Erfolge von Michelson wiederholt. Die Hertzsche Theorie muß deshalb aufgegeben werden.[68])

II.

Das Prinzip der Relativität.

Wenn der Äther durch die Erdbewegung nicht mitgeführt wird, ist es dann möglich, durch optische Erscheinungen die absolute Bewegung der Erde oder vielmehr ihre Geschwindigkeit in bezug auf den ruhenden Äther ersichtlich zu machen? Wenngleich die Antwort des angestellten Versuches

negativ lautete, hat man doch nicht aufgehört, die Versuchsbedingungen auf alle möglichen Arten zu variieren. Welche Mittel man aber auch anwenden möge, man wird immer nur relative Geschwindigkeiten messen können, ich meine: Geschwindigkeiten gewisser materieller Körper in bezug auf gewisse andere materielle Körper. Wenn nämlich die Lichtquelle und die zur Beobachtung dienenden Apparate sich auf der Erde befinden und an der Erdbewegung teilnehmen, so müssen die experimentellen Resultate stets die gleichen sein, einerlei wie auch der Apparat in bezug auf die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer Bahn orientiert sei. Die Aberration macht sich nur deshalb bemerkbar, weil die Lichtquelle ein Stern ist und weil dieser sich in bezug auf den Beobachter bewegt.

Die bisher gemachten Hypothesen geben von diesem allgemeinen Resultate hinreichend Rechenschaft, wenn man die sehr kleinen Größen von der Ordnung des Quadrates der Aberration vernachlässigt. Die Erklärung stützt sich auf den Begriff der Lokalzeit, der von Lorentz eingeführt wurde, und den ich im folgenden zu erklären versuchen will. Betrachten wir zwei Beobachter, von denen der eine sich in A, der andere sich in B befindet, beide wollen ihre Uhren mittels optischer Signale regulieren. Sie verabreden, daß B ein Signal an A schickt, wenn seine Uhr eine bestimmte Stunde anzeigt, und daß A seine Uhr auf diese Stunde in dem Momente einstellt, wo er das Signal empfängt. Wenn sie nur auf diese Weise operieren, so würden sie einen systematischen Fehler begehen, denn das Licht braucht eine gewisse Zeit t, um von B nach A zu gelangen, die Uhr von A würde folglich um diese Zeit t gegen die Uhr von B zurückbleiben. Dieser Fehler ist leicht zu verbessern. Es genügt, die Signale zu wechseln, so daß A seinerseits Signale an B schickt; nach dieser neuen Regulierung wird die Uhr von B um die Zeit t gegen die Uhr von A zurückbleiben. Es genügt alsdann, das arithmetische

Mittel der beiden Regulierungen zu nehmen, um die Uhren in Übereinstimmung zu bringen.

Aber dieses Verfahren setzt voraus, daß das Licht dieselbe Zeit gebraucht, um von *A* nach *B* zu gelangen, wie um von *B* nach *A* zurückzukehren. Diese Voraussetzung ist richtig, wenn die Beobachter sich nicht bewegen; sie ist nicht mehr richtig, wenn beide dieselbe Translation erleiden; denn dann eilt z. B. *A* dem von *B* kommenden Lichte voraus, während *B* hinter dem von *A* kommenden Lichte zurückbleibt. Wenn also beide Beobachter sich in derselben Richtung translatorisch fortbewegen, ohne sich dessen bewußt zu sein, so ist die vorgenommene Regulierung fehlerhaft; ihre Uhren werden nicht gleich gehen, jede von ihnen wird die Lokalzeit anzeigen, welche dem Punkte zukommt, wo sich die Uhr befindet.

Die beiden Beobachter haben kein Mittel, um die Ungleichmäßigkeit des Ganges ihrer Uhren zu erkennen, denn der ruhende Äther kann ihnen nur Lichtsignale übermitteln, die alle gleiche Geschwindigkeit haben, und die anderen Signale, die sich die Beobachter senden könnten, werden ihnen durch Medien übermittelt, welche an ihrer translatorischen Bewegung teilnehmen. Die Erscheinung, welche jeder von ihnen beobachtet, wird durch ihre Uhren entweder zu früh oder zu spät angezeigt, sie tritt nicht zu derselben Zeit auf, wie es geschehen würde, wenn die gemeinsame Translation nicht vorhanden wäre; da man aber mit einer schlecht regulierten Uhr beobachtet, so wird man sich dessen nicht bewußt, und das Äußere der Erscheinungen bleibt unbeeinflußt.

Hieraus folgt, daß die Kompensation leicht zu erklären ist, wenn man das Quadrat der Aberration vernachlässigt, und lange Zeit waren die Experimente so wenig genau, daß man dieses Quadrat nicht zu berücksichtigen brauchte. Aber eines Tages erdachte Michelson ein bedeutend feineres Verfahren: er brachte Strahlen zur Interferenz, die verschie-

dene Wege durchlaufen hatten, nachdem sie an Spiegeln reflektiert waren; jede dieser Wegstrecken hatte ungefähr die Länge eines Meters, und die Interferenzfranzen gestatteten Unterschiede von Bruchteilen eines Tausendstel Millimeters zu messen; man konnte jetzt das Quadrat der Aberration nicht mehr vernachlässigen, und dennoch waren die Resultate wieder negativ. Die Theorie mußte also vervollständigt werden, und das geschah durch die Hypothese von Lorentz und Fitz-Gerald.

Diese beiden Physiker nehmen an, daß alle Körper bei einer translatorischen Bewegung eine Kontraktion in Richtung dieser Translation erleiden, während senkrecht zu dieser Translation ihre Dimensionen ungeändert bleiben. Diese Kontraktion ist für alle Körper die gleiche; sie ist übrigens sehr klein, ungefähr ein zweihundert Milliontel für eine Geschwindigkeit, wie sie die Erde besitzt. Unsere Instrumente könnten diese Kontraktion selbst dann nicht nachweisen, wenn sie viel genauer wären; das von uns benutzte Metermaß nämlich erleidet dieselbe Kontraktion wie die zu messenden Gegenstände. Wenn nun ein Körper genau mit einem Meter übereinstimmt, falls man ihn gleichzeitig mit dem Metermaße in Richtung der Erdbewegung orientiert, so wird er nicht aufhören, auch bei anderer Orientierung genau mit einem Meter übereinzustimmen und zwar, obgleich Körper und Metermaß sowohl ihre Länge als ihre Orientierung geändert haben, und der Grund dafür liegt eben darin, daß diese Änderung für beide die gleiche war. Aber es verhält sich anders, wenn wir eine Länge nicht mehr mit einem Metermaße messen, sondern durch die Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Länge gebraucht, und das eben hat Michelson getan.

Ein Körper, der in der Ruhe kugelförmig ist, nimmt die Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoides an, wenn er bewegt wird; der Beobachter aber wird ihn immer noch für kugelförmig halten, denn er selbst erleidet eine analoge De-

formation, und dasselbe gilt von allen Dingen, die ihm als Bezugspunkt dienen könnten. Die Wellenflächen des Lichtes dagegen bleiben streng kugelförmig und erscheinen ihm deshalb als verlängerte Rotationsellipsoide.

Was ergibt sich nun hieraus? Betrachten wir einen Beobachter und eine Lichtquelle, die beide gleichzeitig translatorisch bewegt werden: die von der Lichtquelle ausgesandten Wellenflächen sind Kugeln, deren Mittelpunkte in den sukzessiven Örtern der Lichtquelle liegen; die Entfernung eines solchen Mittelpunktes von dem jeweiligen Orte der Lichtquelle ist proportional der seit Aussendung des Lichtes verflossenen Zeit, d. h. proportional dem Radius der Kugel. Alle diese Kugeln sind folglich zueinander homothetisch in bezug auf den jeweiligen Ort S der Lichtquelle. Unserem Beobachter aber erscheinen alle diese Kugeln infolge der Kontraktion als verlängerte Ellipsoide, und alle diese Ellipsoide sind gleichfalls homothetisch in bezug auf den Punkt S; die Exzentrizität aller dieser Ellipsoide ist dieselbe und hängt allein von der Geschwindigkeit der Erde ab.[69]) Wir wählen das Gesetz der Kontraktion derartig, daß der Punkt S sich in einem Brennpunkte eines Meridianschnittes des Ellipsoids befindet.

Jetzt ist die Kompensation streng vollständig, und dadurch erklärt sich der Michelsonsche Versuch.

Oben sagte ich, daß nach der gewöhnlichen Theorie die Beobachtung der astronomischen Aberration uns die absolute Geschwindigkeit kennen lehren müßte, wenn unsere Instrumente tausendmal genauer wären. Diesen Ausspruch muß ich jetzt abändern. Die gemessenen Winkel werden allerdings durch die Wirkung der absoluten Geschwindigkeit beeinflußt, aber die Kreise, deren Teilung uns zum Messen der Winkel dient, werden ebenfalls durch die Translation deformiert: sie werden zu Ellipsen; daraus ergibt sich ein Fehler für den gemessenen Winkel, und dieser zweite Fehler würde den ersten genau kompensieren.

Diese Hypothese von Lorentz und Fitz-Gerald erscheint auf den ersten Blick sehr auffallend; zu ihren Gunsten spricht gegenwärtig nur der Umstand, daß sie die unmittelbare Übersetzung des experimentellen Resultates von Michelson ist, wenn man die Länge durch die Zeit definiert, die das Licht zum Durchlaufen der Länge gebraucht.

Wie dem auch sein möge, jedenfalls ist es unmöglich, sich dem Eindrucke zu entziehen, daß das Prinzip der Relativität ein allgemeines Naturgesetz ist und daß man durch kein erdenkbares Mittel jemals andere als relative Geschwindigkeiten ersichtlich machen könne; damit meine ich nicht nur die Geschwindigkeiten der Körper in bezug auf den Äther, sondern auch die Geschwindigkeiten der Körper in bezug aufeinander. Zu viele verschiedene Versuche haben zu übereinstimmenden Resultaten geführt, so daß man sich zu der Annahme versucht fühlt, dem Prinzipe der Relativität sei eine ebenso große Bedeutung beizulegen wie z. B. dem Prinzipe der Äquivalenz von Kräften; jedenfalls ist es angezeigt zu untersuchen, welche Konsequenzen sich aus dieser Betrachtungsweise ergeben, und sodann diese Konsequenzen einer Kontrolle durch das Experiment zu unterwerfen.

III.

Das Prinzip der Reaktion.

Sehen wir jetzt, was in der Lorentzschen Theorie aus dem Prinzipe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung wird. Ein Elektron A setzt sich aus irgendeiner Ursache in Bewegung, es bringt im Äther eine Störung hervor; nach einiger Zeit erreicht diese Störung ein anderes Elektron B, das dadurch aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird. Unter diesen Umständen kann von einer Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung nicht die Rede sein, wenigstens wenn man nicht den Äther betrachtet, sondern nur die Elektronen, die allein der Beobachtung

zugänglich sind, weil unsere Materie eben aus Elektronen besteht.

Das Elektron A hat also das Elektron B aus seiner Lage gebracht; selbst wenn letzteres auf A eine Rückwirkung ausüben sollte, so würde diese Rückwirkung zwar gleich der von A ausgehenden Wirkung sein, aber sie würde niemals gleichzeitig stattfinden, denn das Elektron B kann erst nach einer gewissen Zeit seine Bewegung beginnen, nämlich nach der Zeit, die zur Ausbreitung der Störung nötig ist. Wenn man das Problem einer genaueren Rechnung unterwirft, so gelangt man zu folgendem Resultate: denken wir uns einen Hertzschen Erreger in den Brennpunkt eines parabolischen Spiegels gestellt und mit diesem mechanisch verbunden; dieser Erreger sendet elektromagnetische Wellen aus, und der Spiegel wirft alle diese Wellen in gleicher Richtung zurück, der Erreger strahlt also Energie in einer bestimmten Richtung aus. Die Rechnung lehrt, daß der Erreger einen Rückstoß erleidet, wie eine Kanone, die ein Geschoß ausgesandt hat. Im Falle der Kanone ist der Rückstoß die natürliche Folge der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Die Kanone erleidet den Rückstoß, weil das Geschoß, auf welches sie gewirkt hat, auf sie selbst zurückwirkt.

Aber hier bei den Elektronen verhält sich die Sache anders. Was hier in die Ferne ausgesandt wird, ist nicht ein materielles Geschoß, es ist Energie, und Energie hat keine Masse: sie kann keine Gegenwirkung ausüben. An Stelle des Erregers hätten wir einfach eine Lampe mit einem Reflektor nehmen können, der die Strahlen der Lampe in eine einzige Richtung konzentriert.[70])

Wenn die vom Erreger oder von der Lampe ausgesandte Energie einen materiellen Gegenstand trifft, so erleidet letzterer allerdings einen mechanischen Stoß, als wenn er von einem wirklichen Geschosse getroffen wäre, und dieser Stoß ist gleich dem Rückstoße des Erregers und der Lampe,

wenn unterwegs keine Energie verloren geht und wenn der Gegenstand diese Energie gänzlich absorbiert. Man wird deshalb geneigt sein, auch hier von einer Kompensation zwischen Wirkung und Gegenwirkung zu sprechen. Aber diese Kompensation tritt immer verspätet ein, selbst wenn sie vollständig sein sollte. Sie tritt niemals ein, wenn das Licht nach dem Verlassen der Lichtquelle sich in die interstellaren Räume verliert, ohne jemals einen materiellen Körper zu treffen; sie ist unvollständig, wenn der vom Licht getroffene Körper dasselbe nicht vollständig absorbiert.

Sind diese mechanischen Wirkungen des Lichtes zu klein, um gemessen zu werden, oder sind sie dem Experimente zugänglich? Diese Wirkungen sind keine anderen als diejenigen, welche von Maxwell und Bartholi gefunden wurden; Maxwell hatte die Druckwirkungen durch Rechnung in der Theorie der Elektrostatik und des Magnetismus vorausgesagt, Bartholi war durch thermodynamische Betrachtungen zu dem gleichen Resultate gekommen.

Auf diese Weise erklären sich die Schweife der Kometen. Kleine Teilchen lösen sich vom Kerne des Kometen ab; sie werden vom Sonnenlichte getroffen und von diesem zurückgestoßen, wie durch einen Regen von Geschossen, die von der Sonne ausgehen. Die Masse dieser Teilchen ist so klein, daß die Abstoßung stärker wirkt als die Newtonsche Anziehung; sie bilden so den Kometenschweif, indem sie sich von der Sonne entfernen.

Eine direkte experimentelle Prüfung war nicht leicht. Der erste Versuch führte zur Konstruktion des Radiometers. Aber dieser Apparat rotiert verkehrt, d. h. in einem der Theorie entgegengesetzten Sinne, und die inzwischen gefundene Erklärung seiner Rotation ist eine ganz andere. Indem man einerseits ein noch vollständigeres Vakuum herstellte, andererseits die eine Seite der Blättchen nicht schwärzte und ein Lichtbündel auf eine dieser Seiten richtete, ist man endlich zum Ziele gelangt. Die radiometrischen

Wirkungen und die anderen störenden Ursachen werden durch eine Reihe minutiöser Vorsichtsmaßregeln eliminiert, und so erhält man eine Ablenkung, die zwar sehr geringfügig ist, aber doch der Theorie zu entsprechen scheint.

Dieselben Druckwirkungen folgen aus der Hertzschen Theorie, von der wir oben sprachen, und ebenso aus der Lorentzschen Theorie. Aber da besteht noch ein Unterschied. Nehmen wir an, die Energie gehe, z. B. in Form des Lichtes, von einer Lichtquelle durch ein durchsichtiges Mittel zu irgendeinem Körper. Der nach Maxwell und Bartholi sich ergebende Druck wirkt nicht nur beim Ausströmen der Energie von der Lichtquelle auf diese zurück und auf den erleuchteten Körper bei ihrer Ankunft, sondern auch auf die Materie des durchsichtigen Mediums, das vom Lichte durchdrungen wird. In dem Momente, wo die Lichtwelle ein neues Gebiet dieses Mediums erreicht, treibt der Druck die dort befindliche Materie nach vorwärts und treibt sie wieder rückwärts, wenn die Welle dieses Gebiet verläßt. Der Rückstoß der Lichtquelle bewirkt also zuerst die Vorwärtsbewegung der in der Umgebung dieser Quelle vorhandenen durchsichtigen Materie; ein wenig später bewirkt der Rückstoß dieser selben Materie die Vorwärtsbewegung der durchsichtigen Materie, welche sich etwas weiter entfernt befindet, usw.

Ist nun hier die Kompensation vollständig? Ist die Wirkung des Druckes auf die Materie des durchsichtigen Mediums gleich der Gegenwirkung auf die Lichtquelle, unabhängig davon, von welcher Art diese Materie auch sei? Oder ist diese Wirkung um so kleiner, je weniger brechend das Medium sich verhält und je weniger dicht die Materie desselben verteilt ist, um dann im leeren Raume gleich Null zu werden? Die Hertzsche Theorie betrachtet die Materie als mit dem Äther mechanisch verbunden, so daß der Äther von der bewegten Materie vollständig mitgeführt wird; wenn man sich also für diese Theorie entscheidet, so müßte man

auf die erste Frage mit „ja", auf die zweite mit „nein" antworten.

Es würde sich dann eine vollständige Kompensation ergeben, wie sie das Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion verlangt, und zwar auch in den weniger brechenden Medien, selbst in der Luft und sogar im leeren interplanetaren Raume, in welchem man einen, wenn auch noch so geringfügigen Rest von Materie voraussetzen müßte.

Wenn man sich dagegen für die Lorentzsche Theorie entscheidet, so bleibt die Kompensation immer unvollkommen; sie wird unmerklich in der Luft und Null im leeren Raume.

Wir haben aber oben gesehen, daß das Fizeausche Experiment die Beibehaltung der Hertzschen Theorie nicht gestattet; man muß also die Lorentzsche Theorie annehmen und folglich auf das Prinzip der Reaktion verzichten.

IV.

Folgerungen aus dem Relativitätsprinzip.

Wir haben oben die Gründe kennen gelernt, die dazu führen, das Prinzip der Relativität als ein allgemeines Naturgesetz zu betrachten. Sehen wir jetzt, zu welchen Folgerungen dies Prinzip führt, wenn wir es als definitiv bewiesen ansehen. Zunächst müssen wir die Hypothese von Lorentz und Fitz-Gerald über die Kontraktion aller Körper in Richtung ihrer Translation verallgemeinern. Insbesondere müssen wir diese Hypothese auf die Elektronen selbst ausdehnen. Abraham betrachtete dieselben als kugelförmig und undeformierbar; wir müssen jetzt annehmen, daß diese in der Ruhe kugelförmigen Elektronen die Lorentzsche Kontraktion erleiden, wenn sie sich bewegen, indem sie dann die Gestalt eines abgeplatteten Ellipsoids annehmen.

Diese Deformation wird die mechanischen Eigenschaften der Elektronen beeinflussen. Schon oben hob ich hervor, daß die Bahn der geladenen Elektronen in Wirklichkeit

einen Konvektionsstrom darstellt, und daß die scheinbare Trägheit dieser Elektronen der Selbstinduktion des Stromes zuzuschreiben ist: dies gilt sicher für die negativen Elektronen, es gilt vielleicht auch (wir wissen darüber noch nichts Genaueres) für die positiven Elektronen. Die Deformation der Elektronen, die von der Geschwindigkeit abhängt, ändert die Verteilung der Elektrizität auf ihrer Oberfläche, folglich auch die Intensität des von ihnen erzeugten Konvektionsstromes, folglich auch die Gesetze, nach denen die Selbstinduktion des Stromes als Funktion der Geschwindigkeit variiert.

So ist schließlich die Kompensation eine vollkommene und entspricht den Forderungen des Relativitätsprinzipes, aber doch nur unter folgenden beiden Voraussetzungen:

1. Die positiven Elektronen haben keine wirkliche, sondern nur eine fiktive elektromagnetische Masse, oder wenn ihre wirkliche Masse doch existiert, so ist sie nicht konstant, sondern ändert sich mit der Geschwindigkeit nach denselben Gesetzen wie die fiktive Masse.

2. Alle Kräfte sind elektromagnetischen Ursprungs, oder sie ändern sich wenigstens nach denselben Gesetzen wie die elektromagnetischen Kräfte.

Auch diese bemerkenswerte Theorie verdankt man Lorentz; verweilen wir noch etwas bei ihr und vergegenwärtigen wir uns einige Folgerungen derselben.

Zunächst gibt es keine Materie mehr, denn die positiven Elektronen haben keine wirkliche Masse mehr oder wenigstens keine wirkliche konstante Masse. Die allgemein angenommenen Prinzipien unserer Mechanik, die sich auf den Begriff einer konstanten Masse gründen, müssen also geändert werden.

Sodann muß für alle bekannten Kräfte eine elektromagnetische Erklärung gesucht werden, insbesondere für die Gravitation, oder wenigstens muß das Gesetz der Gravitation so abgeändert werden, daß diese Kraft mit der Geschwindig-

keit ebenso variiert wie die elektromagnetischen Kräfte. Hierauf kommen wir noch zurück.

Alles dieses erscheint auf den ersten Blick etwas künstlich. Insbesondere hat die Deformation der Elektronen etwas sehr Hypothetisches. Man kann die Sache aber anders darstellen und es vermeiden, die Deformationshypothese als Basis der Theorie hinzustellen. Betrachten wir die Elektronen als materielle Punkte und fragen uns, wie ihre Masse als Funktion der Geschwindigkeit variieren muß, wenn das Prinzip der Relativität nicht verletzt werden soll. Oder noch besser: fragen wir uns, welche Beschleunigung sie unter dem Einflusse eines elektrischen oder magnetischen Feldes erleiden müssen, damit dies Prinzip nicht verletzt wird und damit man, wenn die Geschwindigkeit sehr klein vorausgesetzt wird, die gewöhnlichen Gesetze wiederfindet. Wir finden dann, daß Masse und Beschleunigung so von der Geschwindigkeit abhängen müssen, als wenn das Elektron die Lorentzsche Deformation erlitte.

V.

Der Kaufmannsche Versuch.

Wir stehen also vor zwei Theorien: bei der einen sind die Elektronen undeformierbar, das ist die Abrahamsche Theorie, bei der andern erleiden sie die Lorentzsche Deformation. In beiden Fällen wächst ihre Masse mit der Geschwindigkeit und wird unendlich, wenn die Geschwindigkeit diejenige des Lichtes erreicht, aber das Gesetz dieser Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ist nicht in beiden Fällen dasselbe.[71]) Kaufmann hat eine Methode erdacht, um dieses Abhängigkeitsgesetz ersichtlich zu machen; damit hätten wir also ein experimentelles Mittel zur Entscheidung zwischen den beiden Theorien.

Unglücklicherweise waren seine ersten Versuche für diesen Zweck nicht hinreichend genau; er hat sie sodann unter Anwendung größerer Vorsichtsmaßregeln wiederholt und ins-

besondere die Intensität der angewandten Felder mit großer Sorgfalt gemessen. In ihrer neuen Form haben diese Versuche der Theorie Abrahams Recht gegeben. Das Relativitätsprinzip hätte also nicht die entscheidende Bedeutung, die man ihm zuzuschreiben versucht war; man hätte keine Veranlassung mehr zu der Annahme, daß die positiven Elektronen ebenso wie die negativen keine wirkliche Masse besitzen.

Bevor wir aber diese Schlußfolgerung uns aneignen, ist noch etwas zu erwähnen. Die Frage ist von so außerordentlicher Wichtigkeit, daß man wünschen muß, der Kaufmannsche Versuch werde von einem andern Experimentator wiederholt.*) Leider ist dieser Versuch sehr empfindlicher Natur und könnte nur durch einen Physiker von gleicher Geschicklichkeit wie Kaufmann erfolgreich durchgeführt werden. Da alle Vorsichtsmaßregeln in der üblichen Weise getroffen waren, so sieht man allerdings nicht, welchen Einwurf man noch machen könnte.[72])

Auf einen Punkt möchte ich noch die Aufmerksamkeit lenken: auf die Messung des elektrostatischen Feldes, denn von ihr hängt alles ab. Dieses Feld wird zwischen den beiden Armaturen eines Kondensators erzeugt; und zwischen diesen Armaturen mußte ein leerer Raum von möglichster Vollkommenheit hergestellt werden, um vollständige Isolierung zu erlangen. Man maß sodann die Potentialdifferenz der beiden Armaturen und erhielt die Feldstärke, indem man diese Differenz durch die gegenseitige Entfernung der Armaturen dividierte. Dabei setzt man voraus, daß man es mit einem gleichförmigen Felde zu tun hat; ist man dessen aber auch sicher? Könnte es nicht sein, daß in der Nachbar-

*) In dem Momente, wo diese Zeilen gedruckt werden, erfahren wir, daß Bucherer den Versuch wiederholt hat unter Anwendung neuer Vorsichtsmaßregeln, und daß er, im Gegensatze zu Kaufmann. Resultate erhalten hat, die die Lorentzsche Anschauung bestätigen.

schaft einer der Armaturen, der negativen z. B., ein plötzlicher Abfall des Potentials vorhanden ist? Eine Potentialdifferenz kann bei der Berührung zwischen Metall und luftleerem Raume eintreten, und diese Differenz könnte vielleicht auf der positiven Seite nicht dieselbe sein wie auf der negativen Seite; auf diesen Gedanken bringen mich die elektrischen Wirkungen zwischen Quecksilber und luftleerem Raume. Wie gering aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür sein möge, daß diese Ungleichheit des Potentialabfalles wirklich vorkommt, so sollte man doch diese Möglichkeit in Betracht ziehen.

VI.

Das Trägheitsprinzip.

In der neuen Dynamik ist das Trägheitsprinzip noch richtig, d. h. ein isoliertes Elektron hat noch eine geradlinige und gleichförmige Bewegung. Wenigstens nimmt man das allgemein an, allerdings hat Lindemann gegen diese Annahme Einwendungen erhoben; diese Diskussion kann ich ihres verwickelten Charakters wegen hier nicht auseinandersetzen, und ich will deshalb hier keine Entscheidung treffen. Jedenfalls werden einige leichte Modifikationen der Theorie genügen, um den Einwürfen Lindemanns zu entgehen.[78])

Wie man weiß, erleidet ein Körper, der in eine Flüssigkeit eintaucht und sich in ihr bewegt, einen erheblichen Widerstand, aber nur weil unsere Flüssigkeiten viskos sind; in einer idealen, jeder Viskosität entbehrenden Flüssigkeit würde der Körper hinter sich eine flüssige Erhebung, eine Art Kielwasser erzeugen; zu Anfang würde es einer großen Anstrengung bedürfen, um ihn in Bewegung zu setzen, weil man nicht nur den Körper selbst, sondern auch die Flüssigkeit des Kielwassers vorwärtsschieben muß. Aber wenn die Bewegung einmal im Gange ist, so setzt sie sich ohne Widerstand fort, denn der Körper führt bei seiner Vorwärtsbewegung die Flüssigkeitswirbel des Kielwassers einfach mit

sich, ohne daß die lebendige Kraft dieser Flüssigkeit vermehrt würde. Der Körper verhielte sich also derart, als ob seine Trägheit vergrößert werde. Ebenso verhält sich ein Elektron, das sich im Äther vorwärts bewegt: in seiner Umgebung wird der Äther gestört, aber diese Störung begleitet den Körper bei seiner Bewegung; ein mit dem Elektron fortschreitender Beobachter würde deshalb das elektrische und das magnetische Feld, welche das Elektron begleiten, für unveränderlich halten, und diese Felder könnten sich nur ändern, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons variiert. Es ist daher ein Kraftaufwand nötig, um das Elektron in Bewegung zu setzen, denn man muß die Energie des elektrischen und des magnetischen Feldes erzeugen; wenn aber die Bewegung einmal im Gange ist, so ist kein Kraftaufwand mehr nötig, um sie zu unterhalten, denn die erzeugte Energie braucht sich dann nur (wie das Kielwasser) mit dem Elektron fortzubewegen. Diese Energie wirkt daher so, als ob sie die Trägheit des Elektrons vermehrte, wie bei einer idealen Flüssigkeit die Energie eines eingetauchten Körpers durch die mit ihm fortschreitende Bewegung der Flüssigkeit vermehrt wird. Die negativen Elektronen wenigstens haben keine andere als die so erzeugte Trägheit.

Bei der Lorentzschen Hypothese ist die lebendige Kraft (und diese ist identisch mit der Energie des Äthers) nicht proportional zu v^2, wo v die Geschwindigkeit bezeichnet. Wenn aber v sehr klein ist, so ist die lebendige Kraft noch wesentlich proportional zu v^2, die Bewegungsgröße wesentlich proportional zu v, und die beiden Massen sind dann wesentlich konstant und einander gleich. Wenn aber die Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit wird, so wachsen lebendige Kraft, Bewegungsgröße und beide Massen über jede Grenze hinaus.

Bei der Abrahamschen Hypothese sind die entsprechenden Ausdrücke etwas komplizierter; aber in den wesentlichen Zügen gilt auch hier das soeben Gesagte.

Die Masse, die Bewegungsgröße und die lebendige Kraft werden also unendlich, wenn die Geschwindigkeit gleich derjenigen des Lichtes wird. Daraus folgt, daß kein Körper jemals auf irgendeine Weise eine höhere als die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. In dem Maße nämlich, wie die Geschwindigkeit wächst, wächst auch die Masse, so daß die Trägheit jedem neuen Zuwachse der Geschwindigkeit einen immer größeren Widerstand entgegensetzt.

Hier könnte man das folgende Bedenken geltend machen. Setzen wir das Relativitätsprinzip als gültig voraus; ein in Bewegung befindlicher Beobachter besitzt dann kein Mittel, seine eigene Bewegung wahrzunehmen. Wenn nun kein Körper in seiner absoluten Bewegung die Lichtgeschwindigkeit jemals überschreiten kann, so muß dies auch für seine relative Bewegung in bezug auf unseren Beobachter gelten. Man könnte also versucht sein, in folgender Weise zu schließen: Der Beobachter kann eine Geschwindigkeit von 200 000 Kilometer erreichen; der Körper kann bei seiner relativen Bewegung in bezug auf den Beobachter dieselbe Geschwindigkeit erreichen; seine absolute Geschwindigkeit würde dann 400 000 Kilometer betragen, und das ist unmöglich, weil diese Zahl größer ist als die Lichtgeschwindigkeit. Aber dieser Widerspruch ist nur scheinbar; er verschwindet, wenn man die Art und Weise berücksichtigt, wie Lorentz die Lokalzeit berechnet.

VII.

Die Beschleunigungswelle.

Wenn ein Elektron sich bewegt, so erzeugt es in dem umgebenden Äther eine Störung; falls die Bewegung geradlinig und gleichförmig verläuft, so reduziert sich diese Störung auf das Kielwasser, von dem wir im vorigen Kapitel sprachen. Aber etwas anderes tritt ein, wenn die Bewegung

krummlinig und ungleichförmig ist. Die Störung kann dann als die Superposition von zwei anderen Störungen betrachtet werden, denen Langevin die Namen Geschwindigkeitswelle und Beschleunigungswelle gegeben hat.

Die Geschwindigkeitswelle ist nichts anderes als das bei der gleichförmigen Bewegung erzeugte Kielwasser.

Die Beschleunigungswelle ist eine den Lichtwellen vollkommen analoge Störung; sie geht vom Elektron in dem Momente aus, wo dasselbe eine Beschleunigung erleidet, und verbreitet sich sodann in kugelförmigen, aufeinanderfolgenden Wellen mit Lichtgeschwindigkeit.

Daraus ergibt sich folgendes: bei einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung wird die Energie vollkommen erhalten; sobald aber eine Beschleunigung eintritt, entsteht ein Verlust an Energie, indem diese sich in Form von Lichtwellen zerstreut und sich im unendlichen Äther verliert.

Die Wirkungen dieser Beschleunigungswelle, insbesondere der entsprechende Energieverlust, können jedoch in den meisten Fällen vernachlässigt werden, d. h. nicht nur in der gewöhnlichen Mechanik und bei der Bewegung der Himmelskörper, sondern auch bei den Radiumstrahlen, denn bei diesen ist zwar die Geschwindigkeit sehr groß, aber nicht die Beschleunigung. Bei Anwendung der Gesetze der Mechanik muß man dann nur berücksichtigen, daß die Kraft gleich dem Produkte aus Masse und Beschleunigung ist, und daß diese Masse jetzt nach den oben besprochenen Gesetzen mit der Geschwindigkeit variiert. Man nimmt dann die Bewegung quasi-stationär.[74])

In allen Fällen, wo es sich um große Beschleunigungen handelt, genügt dies nicht mehr; es gelten dann die folgenden Prinzipien:

1. In leuchtenden Gasen nehmen gewisse Elektronen eine oszillatorische Bewegung von sehr hoher Frequenz an; die Weglängen sind sehr klein, die Geschwindigkeiten end-

lich, die Beschleunigungen sehr groß; die Energie teilt sich dem Äther mit, und deshalb strahlt das Gas Licht aus, dessen Periode mit der Periode der Elektronenschwingungen übereinstimmt.

2. Wenn umgekehrt ein Gas Licht empfängt, so werden diese Elektronen durch starke Beschleunigungen in Bewegung gesetzt und absorbieren deshalb Licht.

3. In einem Hertzschen Erreger erleiden die in den metallischen Teilen des Apparates zirkulierenden Elektronen im Momente der Entladung eine plötzliche Beschleunigung und nehmen sodann eine oszillatorische Bewegung von hoher Frequenz an. Es folgt daraus, daß ein Teil der Energie in Form Hertzscher Wellen ausstrahlt.

4. In einem glühenden Metalle bewegen sich die darin eingeschlossenen Elektronen mit großen Geschwindigkeiten; wenn sie an die Oberfläche des Metalles gelangen, so können sie diese nicht durchdringen, werden deshalb reflektiert und erleiden so eine beträchtliche Beschleunigung. Deshalb sendet das Metall Licht aus. Das habe ich schon oben unter Nr. IV (S. 191) auseinandergesetzt. Die Einzelheiten der Emissionsgesetze des Lichtes für schwarze Körper lassen sich durch diese Hypothese vollständig erklären.

5. Wenn die Kathodenstrahlen die Antikathode treffen, so werden die mit sehr großer Geschwindigkeit bewegten und diese Strahlen bildenden negativen Elektronen plötzlich aufgehalten. Durch die Beschleunigung, welche sie dadurch erleiden, erzeugen sie Wellenbewegungen im Äther. Nach der Ansicht einiger Physiker ist dies der Ursprung der Röntgenstrahlen; letztere wären demnach nichts anderes als Lichtstrahlen von sehr kurzer Wellenlänge.[75])

Drittes Kapitel.

Die neue Mechanik und die Astronomie.

I.

Die Gravitation.

Die Masse kann auf zwei Arten definiert werden: erstens als Quotient der Kraft durch die Beschleunigung (das ist diejenige Definition der Masse, durch welche die Trägheit eines Körpers gemessen wird), zweitens durch die Anziehung, welche ein Körper auf einen äußeren Körper nach dem Newtonschen Gesetze ausübt. Wir müssen demnach unterscheiden: die Masse als Trägheitskoeffizient und die Masse als Attraktionskoeffizient.[76]) Nach dem Newtonschen Gesetze sind diese beiden Koeffizienten einander streng proportional. Nachgewiesen ist dies nur für Geschwindigkeiten, auf die sich die allgemeinen Prinzipien der Dynamik anwenden lassen. Nun haben wir im vorhergehenden gesehen, daß die Masse als Trägheitskoeffizient mit der Geschwindigkeit wächst; sollen wir daraus schließen, daß die Masse als Attraktionskoeffizient gleichfalls mit der Geschwindigkeit wächst und den Trägheitskoeffizienten proportional bleibt, oder daß im Gegenteil dieser Attraktionskoeffizient konstant ist? Das ist eine Frage, zu deren Entscheidung wir kein Mittel besitzen.

Wenn aber der Attraktionskoeffizient von der Geschwindigkeit abhängt, wie hängt er dann von den beiden Geschwindigkeiten zweier Körper ab, die sich gegenseitig anziehen und im allgemeinen nicht die gleiche Geschwindigkeit besitzen?

Hierüber können wir nur Hypothesen aufstellen, aber wir müssen natürlich untersuchen, welche Hypothesen mit dem Relativitätsprinzipe verträglich sind. Deren gibt es eine große Zahl; die einzige, von der ich hier sprechen will, und die ich kurz auseinandersetzen werde, ist die Lorentzsche Hypothese.

Betrachten wir zunächst Elektronen in der Ruhelage. Zwei Elektronen von gleichem Zeichen stoßen sich ab und zwei Elektronen von entgegengesetztem Zeichen ziehen sich an; in der gewöhnlichen Theorie ist ihre gegenseitige Einwirkung proportional ihren elektrischen Ladungen; wenn wir also vier Elektronen haben, zwei positive A und A', und zwei negative B und B', und wenn diese vier Elektronen absolut gleiche Ladungen besitzen, so ist bei gleicher Entfernung die Abstoßung zwischen A und A' gleich der Abstoßung zwischen B und B', und ferner absolut gleich der Anziehung zwischen A und B' oder zwischen A' und B. Wenn also A und B einander sehr nahe sind, ebenso A' und B', und wenn wir dann die Wirkung des Systems $A + B$ auf das System $A' + B'$ untersuchen, so werden wir zwei Abstoßungen und zwei Anziehungen finden, die sich genau kompensieren; die resultierende Wirkung ist folglich gleich Null.

Nun müssen die materiellen Moleküle betrachtet werden, als wenn sie eine Art von Sonnensystem bildeten, in dem positive und negative Elektronen ihre Bahnen beschreiben, und zwar derart, daß die algebraische Summe aller Ladungen eines Systems gleich Null ist. Ein materielles Molekül ist also in jeder Beziehung dem Systeme $A + B$ vergleichbar, von dem wir soeben sprachen, und die elektrische Gesamtwirkung zweier Moleküle aufeinander muß gleich Null sein.

Die Erfahrung lehrt uns jedoch, daß diese Moleküle sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen; man kann demnach die folgenden beiden Hypothesen machen: erstens kann man voraussetzen, daß die Gravitation in keiner Beziehung zu den elektrostatischen Anziehungen steht, daß sie vielmehr einer davon ganz verschiedenen Ursache zuzuschreiben ist, und daß die beiden Arten von Anziehungen sich einfach superponieren; zweitens kann man annehmen, daß zwischen den Anziehungen der elektrischen Ladungen

keine Proportionalität besteht, und daß die von einer Ladung + 1 auf eine Ladung — 1 ausgeübte Anziehung größer ist als die gegenseitige Abstoßung zweier Ladungen + 1 oder diejenige zweier Ladungen — 1.

Anders ausgedrückt: das von den positiven Elektronen erzeugte Feld und das von den negativen Elektronen erzeugte Feld superponieren sich, bleiben dabei aber vollkommen getrennt. Die positiven Elektronen sind gegen das, von den negativen Elektronen erzeugte Feld empfindlicher als gegen das von den positiven Elektronen erzeugte; umgekehrt verhalten sich die negativen Elektronen. Offenbar wird die Elektrostatik durch eine solche Hypothese komplizierter, aber dafür wird die Gravitation ihr untergeordnet. Das ist im wesentlichen die Hypothese Franklins.

Was geschieht nun, wenn die Elektronen sich bewegen? Die positiven Elektronen werden im Äther eine Störung hervorrufen und dadurch ein elektrisches und ein magnetisches Feld erzeugen. Dasselbe gilt für die negativen Elektronen. Sowohl positive als negative Elektronen erleiden durch die Wirkung dieser verschiedenen Felder einen mechanischen Impuls. Das durch die Bewegung der positiven Elektronen erzeugte elektromagnetische Feld übt in der gewöhnlichen Theorie auf zwei Elektronen von gleicher Ladung, aber von verschiedenem Zeichen gleiche, aber entgegengesetzte Wirkungen aus. Man kann dann das durch die positiven Elektronen hervorgerufene Feld von dem durch die negativen Elektronen hervorgerufenen Felde nicht unterscheiden und folglich nur die algebraische Summe dieser beiden Felder, d. h. das resultierende Feld betrachten.

In der neuen Theorie dagegen geschieht die Wirkung des durch die positiven Elektronen erzeugten elektromagnetischen Feldes auf die positiven Elektronen nach den gewöhnlichen Gesetzen; ebenso die Wirkung des von den negativen Elektronen erzeugten Feldes auf die negativen Elektronen. Betrachtet man aber die Wirkung des von po-

sitiven Elektronen erzeugten Feldes auf negative Elektronen (oder umgekehrt), so folgt sie noch denselben Gesetzen, aber mit einem verschiedenen Koeffizienten. Jedes Elektron ist gegen ein von Elektronen entgegengesetzter Ladung erzeugtes Feld empfindlicher als gegen ein von Elektronen gleicher Ladung erzeugtes Feld.

Das ist die Lorentzsche Hypothese; für kleine Geschwindigkeiten reduziert sie sich auf die Franklinsche Hypothese, für diese kleinen Geschwindigkeiten gibt sie also von dem Newtonschen Gesetze Rechenschaft. Da ferner die Gravitation auf Kräfte elektrodynamischen Ursprungs zurückgeführt wird, so findet die allgemeine Theorie von Lorentz hier Anwendung, und das Prinzip der Relativität ist folglich nicht verletzt.

Wie man sieht, ist das Newtonsche Gesetz auf große Geschwindigkeiten nicht mehr anwendbar und muß für bewegte Körper genau ebenso abgeändert werden, wie die Gesetze der Elektrostatik für bewegte Elektrizität.

Die elektromagnetischen Störungen breiten sich bekanntlich mit Lichtgeschwindigkeit im Raume aus. Man wird deshalb versucht sein, die vorstehende Theorie zu verwerfen, wenn man bedenkt, daß nach den Rechnungen von Laplace die Gravitation sich mindestens zehn millionenmal schneller als das Licht ausbreitet, und daß sie folglich nicht elektrodynamischen Ursprungs sein kann. Dies Resultat von Laplace ist allgemein bekannt, aber die wahre Bedeutung desselben kennt man im allgemeinen nicht. Laplace ging von der Annahme aus, daß die Gravitation sich nicht instantan ausbreitet, sondern die Ausbreitungsgeschwindigkeit sich mit der Geschwindigkeit des angezogenen Körpers in der Weise zusammensetzt, wie es für das Licht bei der astronomischen Aberration geschieht, und daß demnach die zur Wirkung kommende Kraft nicht in die Richtung der Verbindungslinie beider Körper fällt, sondern mit dieser Richtung einen kleinen Winkel bildet. Das ist eine ganz

spezielle und nicht recht begründete Hypothese, und sie ist jedenfalls von der Lorentzschen Hypothese vollständig verschieden. Das Resultat von Laplace beweist deshalb nichts gegen die Theorie von Lorentz.

II.

Vergleich mit den astronomischen Beobachtungen.

Sind die vorstehenden Theorien mit den astronomischen Beobachtungen vereinbar? Nimmt man sie an, so wird jedenfalls die Energie der Planetenbewegungen durch die Wirkung der Beschleunigungswelle andauernd zerstreut. Daraus würde folgen, daß die mittleren Bewegungen der Sterne andauernd solche Beschleunigungen erleiden, als wenn sie sich in einem widerstehenden Mittel bewegten. Aber diese Wirkung ist außerordentlich schwach, viel zu schwach, um selbst durch die genauesten Beobachtungen festgestellt zu werden. Die Beschleunigung dieser Himmelskörper ist verhältnismäßig schwach, so daß die Wirkungen der Beschleunigungswelle vernachlässigt werden können und daß die Bewegung als quasi-stationär betrachtet werden kann. Die Wirkungen der Beschleunigungswelle summieren sich allerdings andauernd, aber diese Häufung geht so langsam vor sich, daß die Beobachtungen viele tausend Jahre hindurch fortgesetzt werden müßten, um die Wirkung bemerkbar zu machen.

Wir machen deshalb die Rechnung so, als wenn die Bewegung quasi-stationär wäre, und zwar für die folgenden drei Hypothesen:

A. Wir gehen von der Abrahamschen Hypothese aus (undeformierbare Elektronen) und behalten das Newtonsche Gesetz in seiner gebräuchlichen Form bei.

B. Wir gehen von der Lorentzschen Hypothese über die Deformation der Elektronen aus und behalten das gewöhnliche Newtonsche Gesetz bei.

C. Wir gehen von der Lorentzschen Hypothese über die Elektronen aus und ändern das Newtonsche Gesetz so ab, wie wir es im vorhergehenden Paragraphen getan haben, wodurch wir es mit dem Relativitätsprinzipe verträglich machen.

Bei der Bewegung des Merkur muß diese Wirkung sich am meisten bemerkbar machen, denn derselbe besitzt unter allen Planeten die größeste Geschwindigkeit. Unter Voraussetzung des Weberschen Gesetzes hatte Tisserand einst eine analoge Rechnung durchgeführt; ich erinnere daran, daß Weber versucht hatte, die elektrostatischen und die elektrodynamischen Erscheinungen gleichzeitig durch die Annahme zu erklären, daß die Elektronen (deren Name damals nur noch nicht erfunden war) aufeinander Anziehungen und Abstoßungen ausüben, deren Richtung in ihre Verbindungslinie fällt und deren Größe nicht nur von ihrer gegenseitigen Entfernung abhängt, sondern auch von den ersten und zweiten Differentialquotienten dieser Entfernung, d. h. von ihren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Dieses Webersche Gesetz ist von den Gesetzen wesentlich verschieden, die sich heute um die Vorherrschaft streiten, es hat mit ihnen aber doch eine gewisse Analogie.[77])

Wenn die Newtonsche Attraktion entsprechend dem Weberschen Gesetze erfolgte, so würde daraus, nach Tisserand, für das Perihel des Merkur eine säkulare Variation von 14″ folgen, und zwar in demselben Sinne, wie die tatsächlich beobachtete, bisher aber nicht erklärte Variation, nur kleiner, denn letztere beträgt 38″.

Kehren wir nun zu den obigen Hypothesen *A*, *B*, *C* zurück und untersuchen zunächst die Bewegung eines von einem festen Zentrum angezogenen Planeten. Die Hypothesen *B* und *C* unterscheiden sich dann nicht, denn wenn der anziehende Punkt fest ist, so ist das von ihm erzeugte Feld ein rein elektrostatisches Feld, in dem die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung va-

riiert, wie es das in diesem Falle mit dem Newtonschen Gesetze identische elektrostatische Gesetz Coulombs verlangt.

Die Gleichung der lebendigen Kraft bleibt bestehen, wenn man die neue Definition für die lebendige Kraft benutzt; ebenso wird die Gleichung der Flächen durch eine andere äquivalente Gleichung ersetzt: das Moment der Bewegungsgröße ist konstant, aber die Bewegungsgröße muß so definiert werden, wie es in der neuen Dynamik geschieht.

Die allein bemerkbare Wirkung wird in einer säkularen Bewegung des Perihels bestehen. Auf Grund der Lorentzschen Theorie findet man für diese Bewegung die Hälfte, auf Grund der Abrahamschen Theorie zwei Fünftel dessen, was das Webersche Gesetz ergab.

Die Bewegung des Merkurperihels würde so bei der Lorentzschen Theorie gleich 7″, bei der Abrahamschen Theorie gleich 5″,6 gefunden werden. Wenn man zwei Körper betrachtet, die sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen, so sind die Wirkungen wenig verschieden, nur die Rechnungen werden etwas komplizierter.

Die Wirkung ist übrigens proportional zu n^3a^2, wenn n die mittlere Bewegung des Sternes und a den Radius seiner Bahn bezeichnet. Infolge des Kepplerschen Gesetzes variiert folglich diese Wirkung umgekehrt proportional zu $\sqrt{a^5}$; außer für Merkur ist sie demnach unmerklich.

Auch für den Mond ist sie unmerklich, obgleich für ihn n sehr groß ist, und zwar deshalb, weil a sehr klein ist; für Venus ist sie fünfmal kleiner, für den Mond hundertmal kleiner als für Merkur. Für Venus und Erde ist noch zu beachten, daß die Bewegung des Perihels (bei gleicher Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung) viel schwerer durch die astronomischen Beobachtungen festzustellen ist, denn die Exzentrizität der Bahnen dieser Planeten ist viel kleiner als bei Merkur.

Die Zusammenfassung dieser Erwägungen und Rechnungen

ergibt folgendes: die einzige, für astronomische Beobachtungen wahrnehmbare Wirkung würde in einer Bewegung des Perihels von Merkur bestehen, und zwar in gleichem Sinne, wie die tatsächlich beobachtete, aber nicht erklärte Bemerkung, nur merklich kleiner.

Dies Resultat kann nicht als ein Argument zugunsten der neuen Dynamik betrachtet werden, denn man müßte immer noch eine andere Erklärung für den größten Teil der Anomalie des Merkur suchen; aber man kann dies Resultat noch weniger als ein Argument gegen die neue Dynamik anführen.

III.

Die Theorie von Lesage.

Es empfiehlt sich, diese Betrachtungen mit einer schon vor langer Zeit vorgeschlagenen Theorie in Verbindung zu bringen, durch welche die universelle Gravitation erklärt werden soll. Nehmen wir an, daß in den interplanetaren Räumen nach jeder Richtung hin sehr feine Korpuskeln mit großer Geschwindigkeit zirkulieren. Ein im Raume isolierter Körper wird offenbar durch die Stöße dieser Korpuskeln nicht beeinflußt, denn diese Stöße verteilen sich gleichmäßig nach allen Richtungen. Wenn aber zwei Körper A und B vorhanden sind, so wirkt B wie ein Schirm, indem er einen Teil derjenigen Korpuskeln auffängt, die sonst A getroffen hätten. Den Stößen, welche A in der zu B entgegengesetzten Richtung empfängt, wirken also keine Stöße in der anderen Richtung entgegen; sie werden also nur unvollkommen kompensiert und treiben A auf B zu.

Das ist die Theorie von Lesage[78]; bei ihrer Diskussion stellen wir uns zunächst auf den Standpunkt der gewöhnlichen Mechanik. Wie sollen die von der Theorie verlangten Stöße vor sich gehen? Nach den Gesetzen der vollkommen elastischen Körper oder nach denen der unelastischen Körper, oder nach einem intermediären Gesetze? Die Lesageschen

Korpuskeln können sich nicht wie vollkommen elastische Körper verhalten; andernfalls nämlich wäre die Wirkung Null, denn die vom Körper B aufgefangenen Korpuskeln würden durch andere ersetzt werden, die vom Körper B zurückprallen, und die Rechnung ergibt, daß eine vollständige Kompensation eintreten würde.

Durch den Stoß müssen also die Korpuskeln Energie verlieren, und diese Energie müßte sich unter Form von Wärme wiederfinden. Wie groß ist nun die auf diese Weise erzeugte Wärmemenge? Es ist zu beachten, daß die Attraktionskraft durch die Körper hindurchwirkt; wir müssen uns daher z. B. die Erde nicht im ganzen als einen Schirm vorstellen, sondern als gebildet durch eine sehr große Anzahl von sehr kleinen kugelförmigen Molekülen, von denen jedes einzeln wie ein kleiner Schirm wirkt, zwischen denen aber die Korpuskeln von Lesage frei zirkulieren können. Die Erde ist daher als Ganzes nicht nur kein Schirm, sondern nicht einmal einem Siebe vergleichbar, denn die Löcher würden hier mehr Platz einnehmen als das Material des Siebes.

Laplace hat bekanntlich gezeigt, daß die Attraktionskraft höchstens um ein Zehnmilliontel geschwächt wird, indem sie durch die Erde hindurch wirkt, und sein Beweis läßt nichts zu wünschen übrig: wenn nämlich die Attraktionskraft durch die Körper, welche sie durchdringt, absorbiert würde, so wäre sie nicht mehr proportional den Massen, sie wäre relativ schwächer für die großen Körper als für die kleinen, denn sie hätten bei ersteren eine Masse von größerer Dicke zu durchdringen. Die Anziehung der Sonne auf die Erde wäre also relativ geringer als die Anziehung der Sonne auf den Mond, und infolgedessen müßte die Bewegung des Mondes eine sehr merkliche Ungleichheit zeigen. Wir müssen demnach bei Annahme der Theorie von Lesage schließen, daß die Gesamtoberfläche der kugelförmigen Moleküle, welche die Erde bilden, gleich dem zehnmillionten Teile der Gesamtoberfläche der Erde ist.

Darwin hat gezeigt, daß die Theorie von Lesage nur dann genau zu dem Newtonschen Gesetze führt, wenn man die Korpuskeln als vollständig unelastisch voraussetzt. Die von der Erde ausgeübte Anziehung auf eine Masse 1 in einer Entfernung 1 ist dann proportional: der Gesamtoberfläche S der kugelförmigen Moleküle, aus denen die Erde besteht, der Geschwindigkeit v der Korpuskeln, der Quadratwurzel aus der Dichte ϱ des von den Korpuskeln gebildeten Mittels. Die erzeugte Wärme ist proportional zu S, der Dichte ϱ und dem Kubus der Geschwindigkeit v.

Außerdem muß noch der Widerstand berücksichtigt werden, den ein Körper erleidet, wenn er sich in einem derartigen Mittel bewegt; er kann sich nämlich nur bewegen, indem er einerseits gewissen entgegenkommenden Stößen widersteht, und andrerseits den in entgegengesetzter Richtung kommenden Stößen vorauseilt, so daß die im Zustande der Ruhe verwirklichte Kompensation nicht mehr besteht. Der berechnete Widerstand ist proportional zu S, zu ϱ und zu v; man weiß nun, daß die Himmelskörper sich so bewegen, als hätten sie keinem Widerstande zu begegnen, und die Genauigkeit unserer Beobachtungen erlaubt für den Widerstand des Mittels eine Grenze zu bestimmen.

Da dieser Widerstand variiert, wie das Produkt $S\varrho v$, während die Anziehungskraft wie $S \cdot \sqrt{\varrho} \cdot v$ variiert, so sehen wir, daß das Verhältnis des Widerstandes zum Quadrate der Anziehungskraft umgekehrt proportional zu dem Produkte Sv ist.

Wir haben also eine untere Grenze für das Produkt Sv. Wir hatten schon eine obere Grenze für S (aus der Absorption der Anziehungskraft durch die von ihr durchdrungenen Körper); wir haben also eine untere Grenze für die Geschwindigkeit v, und zwar muß diese mindestens gleich $24{,}10^{17}$ mal der Geschwindigkeit des Lichtes sein. Hieraus können wir ϱ und die erzeugte Wärmemenge berechnen; die letztere würde genügen, um die Temperatur

in jeder Sekunde um 10^{26} Grade zu erhöhen. In einer gegebenen Zeit würde also die Erde 10^{20} mal mehr Wärme empfangen, als die Sonne in der gleichen Zeit aussendet; dabei spreche ich nicht von der Wärme, welche die Erde von der Sonne empfängt, sondern von der Wärme, welche die Sonne nach allen möglichen Richtungen ausstrahlt.

Offenbar würde die Erde einen solchen Zustand nicht lange ertragen können.

Zu nicht weniger phantastischen Resultaten würde man geführt, wenn man im Gegensatze zu Darwins Annahmen den Korpuskeln von Lesage eine unvollkommene, aber nicht eine verschwindende Elastizität zuschreiben wollte. Dann nämlich würde die lebendige Kraft dieser Korpuskeln zwar nicht vollständig in Wärme verwandelt, aber die erzeugte Anziehung würde doch kleiner sein, indem dann nur der nicht in Wärme verwandelte Teil der lebendigen Kraft zur Erzeugung der Anziehung beitragen würde; und das käme auf dasselbe hinaus; durch eine sorgfältige Anwendung des Satzes vom Virial kann man sich leicht davon überzeugen.

Die Lesagesche Theorie läßt sich noch in eine andere Form bringen; lassen wir die Korpuskeln beiseite und denken wir uns, daß der Äther in allen Richtungen von Lichtwellen durchlaufen werde, die von allen Punkten des Raumes herkommen. Wenn ein materieller Körper von einer Lichtwelle getroffen wird, so übt diese Welle auf ihn eine mechanische Wirkung aus, entsprechend dem Maxwell-Bartholischen Drucke, ganz als wenn er einen Stoß durch ein materielles Geschoß erhalten hätte. Die erwähnten Wellen können somit an Stelle der Korpuskeln von Lesage treten. Diese Hypothese hat unter anderen Tomasina aufgestellt.

Die Schwierigkeiten werden dadurch nicht behoben; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann nur diejenige des Lichtes sein, und dadurch findet man für den Widerstand des Mittels eine unzulässige Zahl. Wenn übrigens das Licht

vollkommen reflektiert wird, so ist die Wirkung Null, ganz wie bei der Hypothese der vollkommen elastischen Korpuskeln. Damit Anziehung entsteht, muß das Licht teilweise absorbiert werden; dann aber wird auch Wärme erzeugt. Die Rechnungen unterscheiden sich nicht wesentlich von denjenigen, die man für die gewöhnliche Theorie von Lesage angestellt hat, und das Resultat bewahrt denselben phantastischen Charakter.

Andrerseits wird die Anziehungskraft von den Körpern, durch welche hindurch sie wirkt, nicht, oder nur kaum absorbiert; anders ist es mit dem uns bekannten Lichte. Soll das Licht die Newtonsche Anziehung hervorbringen, so müßte es sich von dem gewöhnlichen Lichte beträchtlich unterscheiden und z. B. von sehr kurzer Wellenlänge sein. Wenn ferner unsere Augen für derartiges Licht empfänglich wären, so müßte der ganze Himmel uns viel heller als die Sonne erscheinen, so daß die Sonne sich vom Himmel als dunkler Fleck abheben würde, denn sonst würde die Sonne uns abstoßen, statt uns anzuziehen. Aus allen diesen Gründen müßte das Licht, insoweit es zur Erklärung der Attraktionskraft dienen soll, sich in seinen Eigenschaften mehr den Röntgenschen X-Strahlen als dem gewöhnlichen Lichte nähern.

Und nicht genug damit: auch die X-Strahlen würden nicht genügen; so durchdringend sie uns auch erscheinen, sie könnten doch nicht die ganze Erde durchdringen; man müßte also noch Strahlen X' einführen, die noch viel durchdringender als die gewöhnlichen X-Strahlen sind. Sodann müßte ein Teil der Energie dieser X'-Strahlen zerstört werden, denn sonst könnte keine Anziehung entstehen. Wenn man nicht annehmen will, daß diese Energie in Wärme verwandelt wird (was zu einer gewaltigen Wärmeproduktion führen würde), müßte man annehmen, daß sie nach allen Richtungen in der Gestalt von sekundären Strahlen, die man X'' nennen könnte, ausgestrahlt wird; und diese Strahlen X'' müßten eine noch viel größere durchdringende

Kraft besitzen als die Strahlen X', denn sonst würden sie ihrerseits die Entstehung der Attraktionskräfte störend beeinflussen.

Zu solch komplizierten Hypothesen wird man genötigt, wenn man die Theorie von Lesage gangbar machen will.

Alles, was wir soeben gesagt haben, setzt die gewöhnlichen Gesetze der Mechanik voraus. Werden wir zu besseren Resultaten geführt werden, wenn wir von der neuen Dynamik ausgehen? Können wir das Prinzip der Relativität wahren? Geben wir zunächst der Lesageschen Theorie ihre ursprüngliche Form, denken uns also den Raum in allen Richtungen von materiellen Korpuskeln durchflogen; wenn diese vollkommen elastisch wären, so wären die Gesetze der von ihnen verursachten Stöße in Übereinstimmung mit dem Relativitätsprinzipe, aber wir wissen schon, daß dann ihre Wirkung gleich Null wäre. Wir müssen folglich annehmen, daß diese Korpuskeln nicht elastisch sind, und dann ist es schwierig, ein Stoßgesetz aufzustellen, das mit dem Relativitätsprinzipe verträglich wäre. Man würde übrigens auch hier eine beträchtliche Wärmeproduktion finden und zugleich einen sehr fühlbaren Widerstand des Mittels.

Wenn wir die Korpuskeln beiseite lassen und zu der Hypothese des Maxwell-Bartholischen Druckes zurückkehren, so ergeben sich nicht geringere Schwierigkeiten. Lorentz selbst hat die Durchführung dieser Hypothese in einer der Akademie zu Amsterdam vorgelegten Abhandlung vom 25. April 1900 versucht.

Betrachten wir ein System von Elektronen, die im Äther ruhen, und nehmen wir an, daß der Äther in allen Richtungen von Lichtwellen durchzogen werde; sobald eines dieser Elektronen von einer dieser Lichtwellen getroffen wird, wird es in Vibration geraten, und zwar synchron mit der Vibration des Lichtes; aber es kann eine Phasendifferenz entstehen, wenn das Elektron einen Teil der auffallenden Energie absorbiert. Die Absorption der Energie kommt nämlich dadurch zustande, daß die Vibration des Äthers das Elektron mit sich

führt; das Elektron muß folglich hinter dem Äther zurückbleiben. Ein bewegtes Elektron ist einem Konvektionsstrome vergleichbar; jedes magnetische Feld, insbesondere das durch die Lichtstörung selbst hervorgerufene Feld, muß auf das Elektron eine mechanische Wirkung ausüben. Diese Wirkung ist sehr schwach; überdies wechselt sie ihr Zeichen während des Ablaufens einer Periode; gleichwohl ist die mittlere Wirkung nicht Null, falls zwischen den Vibrationen des Elektron und denjenigen des Äthers eine Phasendifferenz besteht. Die mittlere Wirkung ist dieser Differenz proportional, folglich auch proportional der vom Elektron absorbierten Energie.

In die Einzelheiten der Rechnung kann ich hier nicht eingehen; es mag nur erwähnt werden, daß sich als Endresultat eine Anziehung zwischen irgend zwei Elektronen ergibt, und daß die Attraktionskraft umgekehrt proportional der Entfernung beider Elektronen und direkt proportional der von ihnen absorbierten Energie ist.

Ohne Absorption des Lichtes kann somit keine Anziehung entstehen und folglich auch nicht ohne Erzeugung von Wärme, und dadurch ließ sich Lorentz bestimmen, diese Theorie aufzugeben, die mit den Theorien von Lesage, Maxwell und Bartholi im Grunde übereinstimmt. Hätte Lorentz die Rechnung ganz zu Ende geführt, so würde er sich über die erhaltenen Resultate noch mehr gewundert haben. Er hatte nämlich gefunden, daß die Temperatur der Erde in jeder Sekunde um 10^{13} Grade wachsen müßte.

IV.

Schluß.

Im vorstehenden habe ich mich bemüht, möglichst kurz eine möglichst vollständige Übersicht über diese neueren physikalischen Theorien zu geben; ich mußte erklären, wie sie allmählich entstanden sind, denn sonst hätte der Leser sich durch ihre Kühnheit abschrecken lassen. Die neuen Theorien sind noch nicht bewiesen; daran fehlt noch viel;

sie stützen sich nur auf eine Reihe sehr ernst zu nehmender Wahrscheinlichkeiten, und man kann sie deshalb nicht einfach mit Geringschätzung von sich weisen.

Neue Versuche werden uns ohne Zweifel lehren, was wir definitiv von diesen Theorien zu halten haben. Der springende Punkt liegt im Kaufmannschen Versuche und in den weiteren Versuchen, die man zu dessen Nachprüfung anstellen wird.

Man erlaube mir zum Schlusse einen Wunsch auszusprechen. Nehmen wir an, daß nach einigen Jahren diese Theorien neue Proben bestanden haben und schließlich den Sieg davon tragen; dann wird für unseren Gymnasialunterricht eine große Gefahr entstehen: einige Professoren werden sicher die neuen Theorien berücksichtigen wollen. Das Neue ist doch immer so anziehend, und es ist peinlich, nicht hinreichend fortgeschritten zu erscheinen! Wenigstens wird man den Schülern einen kurzen Umriß geben wollen, und ehe man sie die gewöhnliche Mechanik lehrt, wird man ihnen zu verstehen geben, daß deren Zeit vorbei ist, und daß sie höchstens noch für den alten Einfaltspinsel Laplace gut genug sei. Und dann werden die Schüler sich nicht mehr darein finden, mit der gewöhnlichen Mechanik zu arbeiten.

Ist es richtig, die Schüler wissen zu lassen, daß die gewöhnliche Mechanik nur annähernd richtig ist? Ja, aber erst später, nachdem sie dieselbe in ihr Fleisch und Blut aufgenommen, nachdem sie sich daran gewöhnt haben, nur in ihr zu denken, so daß sie keine Gefahr mehr laufen, sie zu vergessen; alsdann wird man ihnen ohne Schaden die Grenzen zeigen können.

Mit der gewöhnlichen Mechanik allein haben sie es im Leben zu tun; sie allein werden sie anzuwenden haben; so groß auch die Fortschritte des Automobilismus sein mögen, unsere Wagen werden niemals Geschwindigkeiten erreichen, bei denen die gewöhnliche Mechanik versagt. Die neue Mechanik ist nur ein Luxus, und an den Luxus darf man erst dann denken, wenn das Unentbehrliche gesichert ist.

Viertes Buch.

Die Wissenschaft der Astronomie.

Erstes Kapitel.

Milchstraße und Gastheorie.

Die Betrachtungen, welche ich hier entwickeln will, haben bisher die Aufmerksamkeit der Astronomen wenig auf sich gelenkt; ich wüßte nur eine geistreiche, von Lord Kelvin ausgesprochene Idee zu zitieren, die uns ein neues Untersuchungsfeld eröffnet, die aber noch niemand weiter verfolgt hat. Ich habe keine neuen Resultate zu verkünden; ich kann nichts anderes tun als eine Vorstellung von den Problemen geben, die sich darbieten, die zu lösen aber bis heute noch niemand versucht hat.

Es ist allgemein bekannt, wie sich die Mehrzahl der heutigen Physiker die Konstitution der Gase vorstellt: die Gase werden durch eine unzählige Menge von Molekülen gebildet, die sich mit großen Geschwindigkeiten kreuzweise in allen Richtungen bewegen. Diese Moleküle wirken wahrscheinlich aus der Ferne aufeinander, aber diese Wirkung nimmt mit der Entfernung so schnell ab, daß ihre Bahnen wesentlich geradlinig bleiben; die Bahnen werden nur gekrümmt, wenn zwei Moleküle einander hinreichend nahekommen; infolge gegenseitiger Anziehung oder Abstoßung weichen sie dann nach rechts oder nach links aus. Man spricht in diesem Falle oft von einem Stoße, man darf aber das Wort „Stoß“ hier nicht im gewöhnlichen Sinne verstehen; die beiden Moleküle brauchen sich nicht wirklich zu berühren, es genügt, wenn sie einander so nahe kommen, daß sich ihre gegenseitige Anziehung fühlbar macht. Die Gesetze für die dadurch her-

vorgerufene Ablenkung sind dieselben, als wenn es sich um einen wirklichen Stoß handelte.

Es scheint zunächst, als ob in dieser unzählbaren Menge von Staub die ungeordneten Stöße der einzelnen Staubkörner nur ein unentwirrbares Chaos hervorbringen können, vor dem der Mathematiker zurückschreckt. Aber das Gesetz der großen Zahlen, dieses höchste Gesetz des Zufalls, kommt uns zu Hilfe, gegenüber einer halben Unordnung müßten wir verzweifeln, aber bei der vollkommenen Unordnung stellt dieses statistische Gesetz eine Art von mittlerer Ordnung her, bei der sich unser Geist beruhigen kann. Auf dem Studium dieser mittleren Ordnung beruht die kinetische Theorie der Gase; sie zeigt uns, daß die Geschwindigkeiten der Moleküle in allen Richtungen gleichmäßig verteilt sind, daß die Größe dieser Geschwindigkeiten zwar von einem Moleküle zum andern variiert, daß aber diese Variation selbst einem Gesetze unterworfen ist, dem sogenannten Maxwellschen Gesetze. Dieses Gesetz lehrt uns, wie viele Moleküle von dieser oder jener Geschwindigkeit vorhanden sind. Wenn sich das Gas von diesem Gesetze entfernt, so ändern die gegenseitigen Stöße der Moleküle Größe und Richtung ihrer Geschwindigkeit und führen das Gas so in den von diesem Gesetze verlangten Zustand wieder zurück. Nicht ohne Erfolg haben sich die Physiker bemüht, auf diese Weise die durch das Experiment bekannten Eigenschaften der Gase zu erklären, z. B. das Mariottesche Gesetz.[79])

Betrachten wir jetzt die Milchstraße; auch hier sehen wir eine unzählige Menge von Staub; die einzelnen Körner dieses Staubes sind nicht mehr Atome, sondern Sterne, sie bewegen sich ebenfalls mit großer Geschwindigkeit; sie wirken aufeinander aus der Ferne, aber diese Wirkung ist bei großer Entfernung so schwach, daß ihre Bahnen geradlinig verlaufen, hin und wieder jedoch können sich zwei Sterne einander so weit nähern, daß ihre Bahnen abgelenkt werden, wie bei einem Kometen, der zu nahe bei dem Jupiter vorübergeht. Kurz,

den Augen eines Riesen, für den unsere Sonne nichts anderes wäre als für uns die Atome, würde das System der Milchstraße wie eine Gasblase erscheinen.

Das war die leitende Idee bei Lord Kelvin. Was können wir aus diesem Vergleiche folgern? Bis zu welchem Maße ist er zutreffend? Diese Fragen wollen wir jetzt untersuchen; ehe wir aber zu einem definitiven Schlusse kommen, müssen wir zur Vermeidung jeder Voreingenommenheit uns darüber klar sein, daß die kinetische Gastheorie für den Astronomen ein Vorbild ist, dem er nicht blindlings folgen darf, durch das er aber erfolgreich inspiriert werden kann. Bisher hat sich die Mechanik des Himmels nur an das Sonnensystem oder an einzelne Systeme von Doppelsternen gewagt. Vor solchen Erscheinungen, wie sie die Milchstraße oder die Sternhaufen oder die auflösbaren Nebelflecke bieten, mußte sie zurückschrecken, weil sie hier nur ein Chaos sah. Aber die Milchstraße ist nicht komplizierter als ein Gas; die auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründeten statistischen Methoden, welche man auf die Gase anwendet, können mit demselben Rechte auf die Milchstraße angewandt werden. Vor allem müssen wir uns darüber klar werden, worin diese beiden Erscheinungen übereinstimmen und worin sie sich voneinander unterscheiden.

Lord Kelvin bemühte sich, nach diesen Methoden die Dimensionen der Milchstraße zu bestimmen; zu dem Zwecke ist man darauf angewiesen, die mittelst unserer Teleskope sichtbaren Sterne zu zählen, wir sind indessen nicht sicher, ob nicht hinter den Sternen, welche wir sehen, noch andere sich befinden, welche wir nicht sehen; was wir auf diese Weise messen, wäre also nicht die Größe der Milchstraße, sondern die Tragweite unserer Instrumente. Die neue Theorie stellt uns andere Hilfsmittel zur Verfügung. Wir kennen nämlich die Bewegungen der uns zunächst benachbarten Sterne, und wir können uns eine Vorstellung von der Größe und von der Richtung ihrer Geschwindigkeiten machen. Wenn

die oben dargelegten Ideen zutreffend sind, so müssen diese Geschwindigkeiten dem Maxwellschen Gesetze gehorchen, und ihr mittlerer Wert muß uns darüber Aufschluß geben, was gewissermaßen der Temperatur unseres fiktiven Gases entspricht. Aber diese Temperatur hängt selbst von den Dimensionen unserer Gasblase ab.[80]) In der Tat, wie muß sich eine gasförmige Masse im leeren Raume verhalten, wenn ihre Elemente sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen? Sie muß die Form einer Kugel annehmen; infolge der Gravitationskraft muß die Dichte im Zentrum am größten sein, ebenso muß der Druck von der Oberfläche nach dem Zentrum zu wachsen, denn die äußeren Partien werden gegen das Zentrum hin angezogen; auch die Temperatur muß nach dem Zentrum zu wachsen: Temperatur und Druck sind dabei durch das adiabatische Gesetz aneinander gebunden, wie in den verschiedenen Schichten unserer Atmosphäre. An der Oberfläche selbst wird der Druck gleich Null und ebenso die absolute Temperatur, d. h. die Geschwindigkeit der Moleküle.

Hier erhebt sich eine weitere Frage: soeben sprach ich von dem adiabatischen Gesetze, aber dieses Gesetz ist nicht für alle Gase dasselbe, denn es hängt von dem Verhältnisse ihrer spezifischen Wärmen ab; für die Luft und für die analogen Gase ist dieses Verhältnis gleich 1,42; aber darf man die Milchstraße mit unserer Luft vergleichen? Offenbar nicht, sie muß vielmehr als ein einatomiges Gas betrachtet werden wie der Quecksilberdampf oder das Argon, oder das Helium, bei denen das Verhältnis der spezifischen Wärmen gleich 1,66 zu nehmen ist. Eines unserer Moleküle nämlich wäre z. B. unser Sonnensystem; aber die Planeten sind recht kleine Wesen gegenüber der Sonne, die allein zählt, so daß unser Molekül in der Tat nur einatomig ist. Betrachten wir andererseits einen Doppelstern; die Wirkung eines fremden Sternes, der sich ihm nähert, wird wahrscheinlich die allgemeine Translationsbewegung des Systems aus seiner Bahn ablenken, ehe er dazu kommt, die relativen Bahnen der beiden einzelnen

Sterne zu stören; kurz, der Doppelstern wird sich wie ein unteilbares Atom verhalten.

Jedenfalls ist der Druck und folglich die Temperatur im Zentrum der Gaskugel um so größer, je größer die Kugel ist, denn der Druck wächst durch das Gewicht aller der übereinander liegenden Schichten. Wir können voraussetzen, daß wir uns ungefähr im Zentrum des Milchstraßensystems befinden, und indem wir die mittlere Eigengeschwindigkeit der Sterne beobachten, können wir die Größe berechnen, welche der zentralen Temperatur unserer Gaskugel entspricht und den Radius der letzteren bestimmen.

Von dem Resultate können wir uns durch die folgenden Betrachtungen eine Vorstellung machen. Machen wir zunächst eine einfachere Hypothese: das System der Milchstraße sei kugelförmig und die Massen seien in ihm homogen verteilt; daraus folgt, daß die Sterne des Systems Ellipsen mit gemeinsamem Mittelpunkte beschreiben. Unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten an der Oberfläche Null sind, können wir die Geschwindigkeit im Mittelpunkte mit Hilfe der Gleichung von der lebendigen Kraft berechnen. Wir finden, daß diese Geschwindigkeit proportional ist dem Radius der Kugel und der Quadratwurzel aus ihrer Dichte. Wenn die Masse dieser Kugel gleich der Masse der Sonne wäre, und wenn ihr Radius gleich dem Radius der Erdbahn wäre, so würde diese Geschwindigkeit (wie man leicht einsieht) gleich der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn sein. Aber in dem von uns betrachteten Falle soll die Masse der Sonne in einer Kugel gleichmäßig verteilt sein, deren Radius eine millionmal größer ist, denn so groß ist die Entfernung der nächsten Sterne von uns; die Dichte ist folglich 10^{18} mal kleiner; die Geschwindigkeiten sind von derselben Ordnung; der Radius muß folglich 10^{9} mal größer sein, d. h. das Tausendfache der Entfernung der nächsten Sterne betragen; daraus ergibt sich dann ungefähr eine Milliarde von Sternen in dem Systeme der Milchstraße.

Man wird einwerfen, daß diese Hypothesen sich weit von der Wirklichkeit entfernen; erstens ist das Milchstraßensystem nicht kugelförmig (darauf kommen wir sogleich noch zurück), und zweitens ist die kinetische Gastheorie mit der Annahme einer homogenen Gaskugel nicht verträglich. Macht man aber die Rechnung genau entsprechend dieser Theorie, so wird man sicher zwar ein verschiedenes Resultat finden, aber letzteres wird doch von derselben Größenordnung sein; und bei einem derartigen Probleme sind die gegebenen Momente so unsicher, daß man damit zufrieden sein muß, nur die Größenordnung der gesuchten Werte zu bestimmen.

Hierbei bemerke ich noch folgendes: das Resultat von Lord Kelvin, das ich soeben durch eine näherungsweise Berechnung wiedergefunden habe, stimmt ziemlich mit den Zählungen überein, welche die Beobachter mit Hilfe ihrer Teleskope vornehmen konnten, so daß wir schließen dürfen, wir seien nahe daran, das Problem der Milchstraße gelöst zu haben. Das erlaubt uns, noch eine andere Frage zu beantworten. Es gibt Sterne, die wir sehen, weil sie leuchten; könnte es nicht auch dunkle Sterne geben, die in den interstellaren Räumen zirkulieren, und deren Existenz uns lange Zeit verborgen bliebe? Was uns die Methode von Lord Kelvin gegeben hat, ist aber die Gesamtzahl der Sterne, die dunkeln Sterne mit einbegriffen; wenn seine Zahl mit der durch die Beobachtungen gegebenen wesentlich übereinstimmt, so ist das nur deshalb möglich, weil es keine dunkeln Sterne gibt, oder weil es wenigstens nicht so viel dunkle Materie gibt wie leuchtende Materie.

Ehe wir weitergehen, wollen wir das Problem noch von einer anderen Seite betrachten. Ist das System der Milchstraße wirklich das Bild eines eigentlichen Gases? Bekanntlich hat Crookes den Begriff eines vierten Aggregatzustandes der Materie eingeführt, in welchem die Gase so stark verdünnt sind, daß sie sich nicht mehr wie wirkliche Gase verhalten, sondern das werden, was Crookes „strahlende

Materie“ nennt. Da nun das Milchstraßensystem sehr geringe Dichte hat, so erhebt sich die Frage, ob sie ein Bild der gasförmigen Materie darstellt, oder ein Bild der strahlenden Materie. Durch Betrachtung der sogenannten „freien Weglänge“ werden wir die Antwort finden.

Die Bahn eines Gasmoleküls kann betrachtet werden, als wenn sie aus verschiedenen geradlinigen Segmenten bestände, die durch sehr kleine Bögen miteinander verbunden sind, wobei letztere den sukzessiven Stößen entsprechen. Die Länge eines solchen Segmentes nennt man die freie Weglänge; natürlich ist diese Länge nicht dieselbe für alle Segmente und alle Moleküle, man kann aber für sie einen mittleren Wert annehmen; dieses nennt man die „mittlere Weglänge“. Sie ist um so größer, je geringer die Dichte des Gases ist. Mit strahlender Materie hat man es zu tun, wenn die mittlere Weglänge größer ist als die Dimensionen des Gefäßes, in dem das Gas eingeschlossen ist; in diesem Falle besteht für ein Molekül die Wahrscheinlichkeit, das ganze Gefäß durchlaufen zu können, ohne einen Stoß zu erleiden. Im entgegengesetzten Falle ist die Materie gasförmig. Es folgt hieraus, daß dieselbe Materie in einem kleinen Gefäße „strahlend“, in einem großen Gefäße „gasförmig“ sein kann; vielleicht muß man deshalb in einer Crookesschen Röhre die Verdünnung um so weiter treiben, je größer die Röhre ist.

Welche Bedeutung hat dies nun für das System der Milchstraße? Dieses System ist eine Gasmasse von sehr geringer Dichte, deren Dimensionen sehr groß sind; besteht nun für einen Stern (das ist ein Molekül der Gasmasse) die Wahrscheinlichkeit das System zu durchqueren, ohne einen Stoß zu erleiden, d. h. ohne einem anderen Sterne so nahe zu kommen, daß eine merkliche Ablenkung von seiner Bahn entsteht? Was verstehen wir hier unter „nahe“? Das ist natürlich etwas willkürlich; wir wollen annehmen, es entspreche der Entfernung des Neptun von der Sonne, was

eine Ablenkung von einigen zehn Grad bedeuten würde; setzen wir also voraus, daß ein jeder unserer Sterne von einer Schutzkugel mit diesem Radius umgeben sei: kann dann zwischen diesen Kugeln hindurch eine gerade Linie gezogen werden? Aus der mittleren Entfernung der Sterne des Systems wird der Radius dieser Kugeln unter einem Winkel von ungefähr ein zehntel Sekunde gesehen werden; und wir haben ungefähr eine Milliarde Sterne. Denken wir uns demnach auf der Himmelskugel eine Milliarde von kleinen Kreisen, je vom Radius einer zehntel Sekunde aufgezeichnet: Besteht dann die Wahrscheinlichkeit, daß diese Kreise die Himmelskugel eine große Anzahl von Malen überdecken? Weit gefehlt; sie werden nur den sechzehntausendsten Teil überdecken. Das System der Milchstraße ist folglich nicht ein Bild der gasförmigen Materie, sondern ein Bild der Crookesschen strahlenden Materie. Da unsere vorhergehenden Überlegungen glücklicherweise sehr wenig genau waren, so brauchen wir sie jetzt nicht wesentlich zu modifizieren.

Hingegen erhebt sich eine andere Schwierigkeit: das System der Milchstraße ist nicht kugelförmig, und wir haben immer so gerechnet, als ob dieses System kugelförmig wäre, da die Kugel die Gleichgewichtsfigur für ein im Raume isoliertes Gas ist. Andererseits existieren Sternhaufen, deren Form kugelförmig ist, und auf die daher unsere vorstehenden Erörteruugen besser passen. Herschel hat sich schon damit beschäftigt, ihre bemerkenswerten Erscheinungen zu erklären. Er setzte voraus, daß die Sternhaufen gleichförmig verteilt sind, und daß jeder Haufen eine homogene Kugel sei; dann würde jeder Stern eine Ellipse beschreiben und alle diese Bahnen würden in gleicher Zeit durchlaufen werden, so daß der Sternhaufen nach einer gewissen Zeitperiode seine ursprüngliche Konfiguration wieder annimmt; und diese Konfiguration würde dann stabil sein. Unglücklicherweise scheinen die Sternhaufen nicht homogen zu

sein; man beobachtet eine Verdichtung im Mittelpunkte; eine solche würde man allerdings auch beobachten, wenn die Kugel homogen wäre, denn für den Beobachter ist sie im Mittelpunkte dicker als am Rande, aber sie würde weniger deutlich hervortreten. Einen Sternhaufen kann man deshalb besser mit einem Gase vergleichen, das sich in adiabatischem Gleichgewichte befindet und die Kugelform annimmt, weil dies die Gleichgewichtsfigur einer Gasmasse ist.

„Aber", wird man einwerfen, „diese Sternhaufen sind viel kleiner, als unser Milchstraßensystem, zu dem sie sogar wahrscheinlich gehören, und obgleich sie viel dichter sind, so werden sie doch viel eher mit einer Masse von strahlender Materie verglichen werden können; die gasförmige Materie andererseits erhält ihr adiabatisches Gleichgewicht nur durch die Folge von unzähligen Zusammenstößen der Moleküle." Diesem Einwurfe kann man vielleicht in folgender Weise begegnen. Setzen wir voraus, daß die Sterne eines Sternhaufens geradeso viel Energie besitzen, daß ihre Geschwindigkeit Null wird, wenn sie die Oberfläche des Haufens erreichen; dann können sie den Sternhaufen durchqueren, ohne einen Zusammenstoß zu erleiden, und wenn sie die Oberfläche erreicht haben, werden sie umkehren und den Haufen von neuem durchqueren; nach einer großen Anzahl solcher Durchquerungen werden sie endlich durch einen Stoß abgelenkt werden; unter diesen Bedingungen werden wir eine Materie vor uns haben, die man noch als gasförmig betrachten kann; wenn es in dem Sternhaufen zufällig Sterne gegeben hätte, deren Geschwindigkeit größer ist, so müßten sie seit langer Zeit die begrenzende Oberfläche überschritten haben; sie haben den Sternhaufen verlassen, um niemals zu ihm zurückzukehren. Aus allen diesen Gründen ist es notwendig, die bekannten Sternhaufen näher zu untersuchen, sich womöglich über das Gesetz ihrer Dichte klar zu werden und zu sehen, ob dasselbe mit dem adiabatischen Gesetze der Gase übereinstimmt.

Kehren wir nun zum Systeme unserer Milchstraße zurück; es ist nicht kugelförmig, man stellt es sich vielmehr abgeplattet vor, etwa wie eine Linse. Wenn nun eine Masse mit der Geschwindigkeit Null die Oberfläche verläßt, so wird sie offenbar mit verschiedener Geschwindigkeit im Zentrum ankommen, je nachdem sie von einem Punkte in der Nähe der Oberflächenmitte oder von einem Punkte des Randes der Linse ausgegangen ist; in letzterem Falle wird sich die Geschwindigkeit als wesentlich größer ergeben.

Bisher nahmen wir an, daß die Eigengeschwindigkeiten der Sterne, die wir beobachten, mit den Geschwindigkeiten vergleichbar seien, wie sie Massen erreichen, die sich in der angegebenen Weise bewegen; dadurch entsteht eine gewisse Schwierigheit. Wir gaben oben einen Wert für die Dimensionen der Milchstraße, wir hatten denselben aus den beobachteten Eigengeschwindigkeiten abgeleitet, und letztere waren von derselben Größenordnung wie die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn; welche Dimension haben wir nun auf diese Weise gemessen? Etwa die Dicke? Oder den Radius des linsenförmigen Systems? Sicher einen dazwischenliegenden Wert; können wir aus ihm etwas über die Dicke oder über den Radius der Linse aussagen? Dazu fehlt es noch an den nötigen Grundlagen; ich begnüge mich damit, auf die Möglichkeit hinzuweisen, daß man eine wenigstens angenäherte Auswertung der beiden Dimensionen auf eine vertiefte Diskussion der Eigenbewegungen gründen kann.

Bei einem solchen Versuche bieten sich zunächst zwei Hypothesen:

Entweder die Sterne des Systems haben Geschwindigkeiten, die größtenteils der Ebene der Milchstraße parallel, sonst aber auf alle, zu dieser Ebene parallelen Richtungen gleichmäßig verteilt sind. In diesem Falle muß die Beobachtung der Eigenbewegungen ein Vorwiegen der zur genannten Ebene parallelen Geschwindigkeitskomponenten ergeben;

ich weiß nicht, ob unter diesem Gesichtspunkte schon eine systematische Diskussion der Beobachtungen angestellt wurde; die Entscheidung ist also zurzeit nicht möglich. Übrigens würde ein derartiges Gleichgewicht nur provisorisch sein können, denn infolge der Zusammenstöße werden die Moleküle (hier also die Sterne) mit der Zeit Geschwindigkeiten annehmen, die senkrecht zur Milchstraßenebene eine merkliche Komponente besitzen und schließlich diese Ebene verlassen, so daß sich das System der Kugelform nähert, der einzigen Gleichgewichtsfigur einer isolierten Gasmasse.

Oder das ganze System besitzt eine gemeinsame Rotation und ist deshalb abgeplattet, wie es die Erde, Jupiter und viele andere rotierende Körper sind. Da aber die Abplattung bedeutend ist, muß die Rotationsgeschwindigkeit sehr groß sein; über die Bedeutung des Wortes „sehr groß" in diesem Zusammenhange müssen wir uns noch einigen. Die Dichte der Milchstraße ist 10^{25} mal geringer, als die Dichte der Sonne; eine Rotationsgeschwindigkeit, die $\sqrt{10^{25}}$ mal kleiner als diejenige der Sonne ist, wäre der letzteren also hinsichtlich der Abplattung äquivalent; eine Geschwindigkeit, die 10^{12} mal geringer als die Erdgeschwindigkeit ist, also etwa ein dreißigstel Bogensekunde pro Jahrhundert beträgt, wäre hier schon als sehr groß zu betrachten, für die Möglichkeit eines stabilen Gleichgewichtes beinahe zu groß.

Bei dieser Hypothese werden die beobachtbaren Eigenbewegungen gleichmäßig verteilt sein, und es ist kein Grund mehr für das Vorwiegen der zur Milchstraßenebene parallelen Komponenten vorhanden. Diese Bewegungen lehren uns nichts über die Rotation selbst, denn wir sind selbst ein Teil des rotierenden Systems. Wenn die spiralförmigen Nebelflecke andere Milchstraßensysteme darstellen und nicht zu unserem Systeme gehören, so nehmen sie an dieser Rotation nicht teil, und man könnte ihre Eigenbewegungen studieren. Das wird allerdings durch ihre große Entfernung

scheinbar erschwert; wenn ein Nebelfleck die Dimensionen unserer Milchstraße besitzt und sein scheinbarer Radius z. B. 20 Bogensekunden beträgt, so beträgt seine Entfernung 10,000mal den Radius der Milchstraße.

Für unsere Frage ist dies aber belanglos, denn nicht über die Translation unseres Systems sollen uns diese fernen Nebelflecke etwas lehren, sondern über die Rotation. Durch ihre scheinbare Bewegung unterrichten uns die Fixsterne über die tägliche Rotation der Erde, obgleich ihre Entfernung ungeheuer ist. Unglücklicherweise ist die mögliche Rotation der Milchstraße, sei sie relativ auch noch so schnell, absolut betrachtet sehr langsam, und die Einstellung der Teleskope auf die Nebelflecke kann nicht sehr genau sein; die Beobachtungen müssen also Tausende von Jahren fortgesetzt werden, bis sie uns etwas lehren können.

Bei dieser zweiten Hypothese wäre die Gestalt des Milchstraßensystems jedenfalls eine definitive Gleichgewichtsfigur.

Über den relativen Wert dieser beiden Hypothesen will ich nicht länger diskutieren, denn es gibt noch eine dritte Hypothese, die wahrscheinlich am meisten für sich hat. Unter den nicht auflösbaren Nebelflecken unterscheidet man bekanntlich verschiedene Arten: die unregelmäßigen Nebelflecke, zu denen derjenige des Orion gehört, die planetarischen oder Ringnebel, und die Spiralnebel. Die Spektra der beiden ersten Arten sind bestimmt worden, sie sind diskontinuierlich; diese Nebel werden also nicht von Sternen gebildet; ihre Verteilung über den Himmel scheint übrigens mit der Milchstraße in Beziehung zu stehen; einige sind ihr besonders nahe, andere sind besonders weit von ihr entfernt; sie gehören also zum System der Milchstraße. Die Spiralnebel dagegen werden allgemein als von der Milchstraße unabhängig betrachtet; man nimmt an, daß sie ebenfalls aus einer Menge von Sternen bestehen, oder, mit anderen Worten: daß sie andere Milchstraßensysteme sind, in großer Entfernung von unserem Systeme. Die neueren

Arbeiten von Stratonoff versuchen unser Milchstraßensystem als einen Spiralnebel darzustellen, und das ist die dritte Hypothese, von der ich sprechen wollte.

Wie soll man die eigentümlichen Erscheinungen erklären, welche uns die Spiralnebel darbieten und die so regelmäßig und so konstant sind, daß wir sie nicht dem Zufalle zuschreiben können? Es genügt, einen flüchtigen Blick auf die Abbildung eines solchen Nebels zu werfen, um zu erkennen, daß sich die Masse in Rotation befindet; man kann sogar den Sinn dieser Rotation feststellen, denn alle spiralförmigen Radien sind in gleichem Sinne gekrümmt; offenbar bleibt der bei der Drehung vorwärtsmarschierende Flügel gegen den am Drehpunkte feststehenden Flügelmann zurück, und dadurch bestimmt sich der Sinn der Rotation. Diese Nebelflecke können daher nicht mit einem in Ruhe befindlichen Gase verglichen werden, auch nicht mit einem Gase, das sich unter dem Einflusse einer gleichförmigen Rotation in relativem Gleichgewichte befände; man muß sie mit einem andauernd bewegten Gase vergleichen, in welchem heftige innere Stürme herrschen.

Setzen wir z. B. voraus, daß die Rotationsgeschwindigkeit des zentralen Kernes sehr groß sei (was wir darunter verstehen, brauche ich nicht zu erörtern), zu groß für ein stabiles Gleichgewicht; alsdann wird am Äquator die Zentrifugalkraft über die Anziehungskraft überwiegen, und die Sterne werden sich durch den Äquator nach außen entfernen und sich dabei auf divergenten Bahnen bewegen; während sie sich weiter und weiter entfernen, bleibt ihr Rotationsmoment konstant, während der Radiusvektor wächst, ihre Winkelgeschwindigkeit muß also abnehmen, und deshalb bleibt der äußere Flügel scheinbar zurück.

Bei dieser Auffassungsweise ist keine permanente Bewegung vorhanden; der zentrale Kern verliert beständig an Materie, die sich nach außen entfernt und nicht zurückkehrt; der Kern wird also immer leerer. Wir können diese Hypo-

these indessen abändern. In dem Maße, wie der Stern sich entfernt, verliert er an Geschwindigkeit, und diese wird schließlich gleich Null; in dem Momente kommt die Attraktionskraft zur Wirkung und führt ihn zum Kerne zurück; so entstehen zentripetale Bewegungen. Nehmen wir den Vergleich mit einer Truppe in Marschordnung wieder auf, die eine Schwenkung ausführt, so müssen die zentripetal bewegten Sterne im ersten Gliede, die zentrifugal bewegten im zweiten Gliede gedacht werden; die zentrifugale Kraft nämlich muß durch die Attraktion ausgeglichen werden, die von den zentralen Schichten des Sternschwarmes auf die äußeren Schichten ausgeübt wird.

Nach einer gewissen Zeit wird sich ein permanenter Zustand herstellen; da der Schwarm gekrümmt ist, so wird die Anziehung, welche der äußere Flügel desselben auf den zentralen Teil des Schwarmes ausübt, die Bewegung des letzteren verzögern, und die Anziehungskraft des zentralen Teiles auf den äußeren Flügel wird die Bewegung dieses Flügels beschleunigen, der letztere wird daher immer weniger zurückbleiben, und schließlich werden alle die spiralförmig gekrümmten Strahlen mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotieren. Man kann dabei noch annehmen, daß die Rotation des Kernes schneller vor sich geht als die Rotation der Strahlen.

Hier erhebt sich noch eine weitere Frage: weshalb ordnen sich diese zentripetalen und zentrifugalen Sternschwärme in einzelnen Strahlen an, anstatt sich nach allen Richtungen gleichmäßig zu zerstreuen? Ferner, weshalb verteilen sich diese Strahlen gleichmäßig um den Kern? Die Schwärme konzentrieren sich in einzelne Strahlen wegen der Anziehung, welche von den schon existierenden Schwärmen auf die Sterne ausgeübt werden, die sich in ihrer Nachbarschaft eben von dem Kerne lösen. Wenn einmal eine Ungleichheit entstanden ist, so hat sie aus diesem Grunde das Bestreben, sich immer mehr zu entwickeln.

Schwieriger ist die Frage zu beantworten, weshalb sich die Strahlen gleichmäßig verteilen. Nehmen wir an, es gäbe keine Rotation, und alle Sterne befänden sich in zwei zueinander rechtwinkligen Ebenen, und zwar sei ihre Verteilung symmetrisch im Verhältnisse zu beiden Ebenen. Infolge der Symmetrie ist kein Grund dafür vorhanden, daß sie diese Ebenen verlassen, noch dafür, daß die Symmetrie sich ändert. Diese Konfiguration würde also im Gleichgewichte sein, aber dies Gleichgewicht wäre unstabil.

Wenn aber Rotation vorhanden ist, so ergibt sich eine analoge, im Gleichgewichte befindliche Konfiguration bei Annahme von vier gekrümmten Strahlen, die unter sich gleich sind und sich unter einem Winkel von je 90^0 schneiden; und wenn die Rotation hinreichend schnell ist, so kann dies Gleichgewicht stabil sein.

In die Einzelheiten kann ich hier nicht weiter eingehen; es genügt, wenn aus dem vorstehenden erkannt wird, daß diese Spiralformen vielleicht einst erklärt werden können, ohne daß man andere Hilfsmittel nötig hat als das Gravitationsgesetz und statistische Betrachtungen, die den in der Gastheorie üblichen analog sind.

Was ich von inneren Stürmen in den Nebelflecken gesagt habe, zeigt, daß es ein großes Interesse hat, die Gesamtheit der Eigenbewegungen der Sterne systematisch zu studieren; das wird man nach etwa hundert Jahren ausführen können, indem man eine zweite Ausgabe der Himmelskarte unternimmt und sie mit der gegenwärtig von uns hergestellten ersten Ausgabe vergleicht.

Zum Schluß will ich die Aufmerksamkeit noch auf die Frage nach dem Alter der Milchstraße und der Nebelflecke lenken. Wenn die von uns vorstehend entwickelten Theorien richtig sind, so können wir uns von diesem Alter eine Vorstellung machen. Die Art statistischen Gleichgewichts, von der wir in den Gasen ein Beispiel sehen, kann sich nur infolge einer großen Anzahl von Zusammenstößen der Moleküle herstellen.

Wenn diese Zusammenstöße selten sind, so kann sich also das Gleichgewicht erst nach sehr langer Zeit bilden; das System der Milchstraße (oder wenigstens die in ihm enthaltenen Sternhaufen) und die Nebelflecke haben diesen Gleichgewichtszustand nur erreicht, weil sie sehr alt sind, und damit haben wir eine untere Grenze. Wir können ebenfalls eine obere Grenze angeben; das Gleichgewicht nämlich ist nicht definitiv und kann nicht immer dauern. Unsere Spiralnebel sind Gasen vergleichbar, die sich in permanenter Bewegung befinden; aber die so bewegten Gase sind viskos, und ihre Geschwindigkeiten nutzen sich schließlich ab. Der Viskosität entspricht bei den Sternen eine Größe, die von der Wahrscheinlichkeit für die Molekülzusammenstöße abhängt; dieselbe ist außerordentlich klein, so daß der gegenwärtige Zustand noch für eine außerordentlich lange Zeit andauern kann, aber nicht für immer: unsere Milchstraßensysteme können nicht unendlich alt werden und nicht ewig leben.

Betrachten wir ferner unsere Atmosphäre: an ihrer Oberfläche muß eine unendlich kleine Temperatur herrschen, und die Geschwindigkeit der Moleküle muß dort sehr nahe gleich Null sein. Aber hiermit ist nur die mittlere Geschwindigkeit gemeint; ein einzelnes Molekül kann infolge der Zusammenstöße (wenn auch selten) eine außerordentlich große Geschwindigkeit erlangen, und dann wird es die Atmosphäre verlassen und nicht mehr zu ihr zurückkehren; in außerordentlich langer Zeit würde sich unsere Atmosphäre also allmählich leeren. Das Milchstraßensystem wird infolge des gleichen Vorganges auch hin und wieder einen Stern verlieren, und das gibt eine Grenze für die Dauer des Systems.

Wenn wir so das Alter der Milchstraße abschätzen, würden wir offenbar enorme Zahlen finden. Aber hier bietet sich noch eine Schwierigkeit. Nach dem Urteil einiger Physiker, das sich auf andere Überlegungen stützt, soll den Sonnen nur eine verhältnismäßig kurze Dauer bestimmt sein, ungefähr fünfzig Millionen Jahre, während das von uns gefundene

Minimum sehr viel größer wäre. Muß man annehmen, daß die Entwicklung der Milchstraße begann, als die Materie noch dunkel war? Aber wie konnten dann die sie bildenden Sterne alle zu gleicher Zeit zur Reife gelangen, zu einer Reife, die von so kurzer Dauer sein soll? Oder haben sie etwa nacheinander dieses reife Alter erreicht, und bilden etwa die von uns gesehenen Sterne nur eine geringe Minorität gegenüber denjenigen, die entweder schon erloschen sind oder erst in der Zukunft aufleuchten werden? Wie aber läßt sich diese Annahme mit dem vereinigen, was wir oben über die Nichtexistenz dunkler Materie in größerer Menge gesagt haben? Müssen wir jetzt eine dieser beiden Annahmen aufgeben? Und welche? Ich beschränke mich darauf, die Schwierigkeiten zu bezeichnen, ohne die Lösung versuchen zu können; ich schließe also mit einem großen Fragezeichen. Ist es doch auch interessant, Probleme zu stellen, selbst dann, wenn ihre Lösung scheinbar noch in weiter Ferne liegt.

Zweites Kapitel.

Die Geodäsie in Frankreich.

Jedermann begreift, welches Interesse wir daran nehmen, die Form und die Dimensionen unserer Erde zu kennen; aber manche werden sich wohl über die Genauigkeit wundern, die man dabei verlangt. Ist das überflüssiger Luxus? Wozu dienen die Anstrengungen, welche von den Geodäten dafür aufgewandt werden?

Wenn man diese Frage an einen Parlamentarier richtete, so würde er, glaube ich, antworten: „Ich muß die Geodäsie für eine der nützlichsten Wissenschaften halten, denn sie gehört zu denjenigen, die uns am teuersten zu stehen kommen." Ich möchte es versuchen, eine etwas genauere Antwort auf die gestellten Fragen zu geben.

Die großen Kunstbauten, sowohl diejenigen für den Krieg als diejenigen für den Frieden, können nicht ohne lange

Vorstudien unternommen werden, welche unnütze Versuche, falsche Berechnungen und überflüssige Kosten ersparen. Diese Vorstudien können nur auf Grund einer guten Karte durchgeführt werden. Eine Karte ist aber nur ein wertloses Phantasiegebilde, wenn man sie konstruiert, ohne sich auf ein solides Knochengerüst zu stützen. Ebensogut könnte man einen menschlichen Körper aufrecht stellen wollen, aus dem man das Skelett entfernt hat.

Dieses Knochengerüst liefern uns die geodätischen Messungen; ohne Geodäsie also gibt es keine gute Karte, ohne gute Karte keine großen öffentlichen Arbeiten.

Diese Gründe würden sicher zur Rechtfertigung eines großen Teiles der Ausgaben genügen; aber sie können doch nur Männer der Praxis überzeugen. Auf diese Art von Gründen können wir uns hier nicht weiter einlassen; es gibt noch höhere und wichtigere Gründe.

Wir wollen die Frage deshalb anders stellen: Kann die Geodäsie zur besseren Erkenntnis der Natur beitragen? Kann sie die Einheit und Harmonie derselben uns verstehen helfen? Eine vereinzelte Tatsache hat hierbei nur wenig Wert, die Errungenschaften der Wissenschaft werden nur wertvoll, wenn sie neue Fortschritte vorbereiten.

Wenn man einen kleinen Buckel auf dem Erdellipsoide entdecken würde, so wäre diese Entdeckung an sich ohne großes Interesse. Sie würde dagegen wertvoll werden, wenn wir beim Erforschen der Ursache dieses Buckels die Aussicht hätten, in neue Geheimnisse der Natur einzudringen.

Von solchen Gedanken waren Maupertuis und La Condamine beseelt, als sie sich im achtzehnten Jahrhundert so verschiedenen Klimaten aussetzten; es handelte sich damals nicht nur um die Gestalt unseres Planeten, sondern es handelte sich um das ganze Weltsystem.

Wenn sich nämlich ergab, daß die Erde wirklich abgeplattet sei, so hatte Newton gesiegt und mit ihm die Lehre von der Gravitation und die ganze moderne Mechanik des Himmels.

Hätte die Geodäsie uns heute, anderthalb Jahrhunderte nach dem Siege der Newtonianer, nichts mehr zu lehren?

Wir wissen nichts über das Innere der Erdkugel. Die Schächte der Bergwerke und die Tiefbohrungen haben uns eine Schicht von ein oder zwei Kilometer Dicke kennen gelehrt, d. h. den tausendsten Teil der ganzen Erdmasse; was aber liegt unter dieser Schicht?

Von allen merkwürdigen Reisen, die Jules Verne erträumt hat, hat uns vielleicht die Reise nach dem Mittelpunkte der Erde in die am wenigsten erforschten Gegenden geführt.

Die tiefliegenden Felsen, zu denen wir nicht gelangen können, üben jedoch aus der Ferne ihre Anziehungskraft aus; sie wirken dadurch auf das Pendel und deformieren das Erdsphäroid. Die Geodäsie kann sie deshalb sozusagen aus der Ferne wiegen und uns über ihre Verteilung im Erdinnern unterrichten. Sie läßt uns damit einen Blick in diese geheimnisvollen Gebiete werfen, die Jules Verne uns nur mit seiner Einbildungskraft zeigen konnte.

Das ist nicht ein eitler Traum. Durch Vergleichung aller Messungen gelangte Faye zu einem für uns höchst überraschenden Resultate. Unter den Meeren gibt es in derTiefe Felsen von sehr großer Dichte; unter den Kontinenten dagegen gibt es hohle Räume.[81])

Neue Beobachtungen werden diese Schlußfolgerungen vielleicht im einzelnen modifizieren.

Auf jeden Fall hat uns unser verehrter Senior gezeigt, in welcher Richtung man suchen muß, und was der Geodät den Geologen lehren kann, der darauf ausgeht, die Konstitution des Erdinnern aufzuklären, und was er dem Denker lehren kann, der über Vergangenheit und Ursprung unseres Planeten nachdenken will.

Weshalb habe ich aber dies Kapitel „die Geodäsie in Frankreich" genannt? Deshalb, weil diese Wissenschaft, mehr vielleicht als alle anderen, einen nationalen Charakter angenommen hat. Es ist leicht, den Grund dafür einzusehen.

Es muß einen Wettbewerb unter den Nationen geben. Im wissenschaftlichen Wetteifer gilt noch immer die Ritterlichkeit, oder wenigstens fast immer; jedenfalls ist dieser Wetteifer notwendig, denn er ist immer fruchtbar.

Bei derartigen Unternehmungen, welche so langandauernde Arbeit und so viele Mitarbeiter erfordern, verschwindet der einzelne, wenn auch wider Willen; es hat keiner das Recht zu sagen: dies ist mein Werk. Deshalb besteht der Wettbewerb hier nicht zwischen den einzelnen Menschen, sondern zwischen den Nationen.

So kommen wir dazu, uns zu fragen, welchen Anteil Frankreich an der Geodäsie hatte. Ich glaube, wir haben das Recht, auf diesen Anteil stolz zu sein.

Zu Anfang des achtzehnten Jahrhunderts erhoben sich lange Diskussionen zwischen den Newtonianern, welche die Erde für abgeplattet hielten (wie es die Theorie der Gravitation erfordert), und zwischen Cassini, der sich durch ungenaue Messungen täuschen ließ und unsere Erde für ein verlängertes Rotationsellipsoid hielt. Nur die direkte Beobachtung konnte die Frage entscheiden. Unsere Académie des Sciences unternahm diesen, für die damalige Zeit gigantischen Versuch.

Während Maupertuis und Clairaut einen Meridiangrad unter dem nördlichen Polarkreise maßen, gingen Bouguer und La Condamine in die Berge der Anden, also in Gegenden, die damals zu Spanien gehörten und heute die Republik Equador bilden.

Unsere Abgesandten mußten sich großen Entbehrungen aussetzen. Das Reisen war damals nicht so leicht wie heute.

Das Land, in dem Maupertuis arbeitete, war allerdings keine Wüste, soll er doch dort sogar von den Lappländerinnen nicht unfreundlich aufgenommen sein, während den eigentlichen Nordpolfahrern derartiges versagt bleibt. Das war ungefähr die Gegend, in welcher heutzutage bequeme Dampfer jeden Sommer ganze Karawanen von Touristen

und jungen Engländern befördern. Aber damals gab es noch keine Agentur Cook, und Maupertuis konnte mit gutem Gewissen behaupten, daß er eine Polarexpedition gemacht habe.

Vielleicht hatte er nicht ganz unrecht. Die Russen und Schweden unternehmen heute analoge Messungen auf Spitzbergen, also in einem Lande, wo es wirkliche Eisbänke gibt. Sie verfügen jedoch über ganz andere Hilfsmittel, und die Differenz der Jahre kompensiert so die Differenz der Breitengrade.

Damals herrschte Voltaire im Reiche des Geistes, und Maupertuis hatte das Unglück, ihm zu mißfallen; die traurige Erinnerung daran ist uns durch die Schmähschrift Voltaires über den Doktor Akakia erhalten. Erst wurde Maupertuis von ihm über alle Maßen gelobt; doch die Schmeicheleien der Könige sind ebenso zu fürchten, wie ihre Ungnade, denn das Erwachen ist dann um so schrecklicher. Voltaire hat das selbst erfahren müssen.

Maupertuis wurde von ihm als „mein lieber Meister im Denken“ bezeichnet, als „Marquis des Polarkreises“, als „Aplatisseur du monde et de Cassini“ und sogar (was die höchste Schmeichelei sein sollte) als „Sir Isaac Maupertuis“; Voltaire schrieb ihm: „Nur den König von Preußen stelle ich mit Ihnen auf gleiche Stufe; er hat nur den einen Fehler: daß er nicht Mathematiker ist.“ Aber bald änderte sich das Bild; er spricht nicht mehr davon, ihn „unter die Götter zu versetzen, wie es mit den Argonauten bei den Griechen geschah“, oder „den Rat der Götter vom Olymp herabsteigen zu lassen, um seine Arbeiten zu bewundern“, sondern er will ihn jetzt in ein Irrenhaus bringen lassen. Er spricht nicht mehr von seinem feinen Geiste, sondern von seinem despotischen Stolze, der durch wenig Wissen und viel Dünkel genährt werde.

Diese heroisch-komischen Streitigkeiten will ich hier nicht weiter erörtern; es sei mir nur gestattet, noch einige Bemer-

kungen über zwei Verse von Voltaire zu machen. In seinem Discurs sur la modération (es handelt sich dabei nicht um Mäßigung im Loben oder im Kritisieren) schreibt der Dichter:

> Vouz avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui
> Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

Diese beiden Verse, welche an Stelle der früheren Lobhymnen traten, sind sehr ungerecht, und Voltaire war ein viel zu heller Kopf, um sich dessen nicht bewußt zu sein.

Aber damals schätzte man die Entdeckung am höchsten, die man machen kann „sans sortir de chez soi".

Heute würde man umgekehrt von der Theorie wenig Aufheben machen. Auch das ist ein Verkennen des Zieles der Wissenschaft.

Wird die Natur von Laune und Zufall regiert oder herrscht in ihr die Harmonie? Das ist die Frage; nur wenn die Wissenschaft uns diese Harmonie enthüllt, ist sie schön, und wert gepflegt zu werden. Aber wie sollen wir einen Einblick in die Harmonie der Natur anders gewinnen, als durch die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung? Es ist also unser Hauptziel, zu untersuchen, ob diese Übereinstimmung vorhanden ist oder fehlt. Diese beiden Worte, Theorie und Erfahrung, deren Inhalt wir miteinander vergleichen müssen, sind voneinander untrennbar. Es wäre sinnlos, das eine zugunsten des anderen vernachlässigen zu wollen. Für sich allein wäre die Theorie leer, die Erfahrung kurzsichtig; beide wären überflüssig und interesselos.

Maupertuis hatte deshalb ein Anrecht auf einen Ruhmesanteil. Gewiß, sein Anteil war nicht dem eines Newton vergleichbar, der vom göttlichen Funken berührt war, selbst nicht mit dem seines Zeitgenossen Clairaut. Trotzdem ist sein Verdienst nicht gering zu schätzen, denn sein Werk war notwendig; Frankreich war im siebzehnten Jahrhundert von England weit überholt, und wenn es im folgenden Jahrhundert seinen Platz wieder eroberte, so haben wir das nicht nur dem

Genie eines Clairaut, eines d'Alembert, eines Laplace zu danken, sondern auch dem langen und mühevollen Ausharren eines Maupertuis und eines La Condamine.

Wir kommen jetzt zu einer Periode der Geodäsie, die man als die zweite heroische bezeichnen könnte. Frankreich war im Innern zerrissen. Ganz Europa stand ihm in Waffen gegenüber; diese Riesenkämpfe schienen alle Kräfte zu absorbieren. Und trotz alledem blieb ihm noch Kraft, der Wissenschaft zu dienen. Die Männer jener Zeit schreckten vor keinem Unternehmen zurück, sie hatten Vertrauen auf den Erfolg.

Delambre und Méchain wurden beauftragt, einen Meridianbogen von Dünkirchen bis Barcelona zu messen. Man ging jetzt nicht nach Lappland oder Peru; die feindlichen Flotten versperrten den Weg dorthin. Wenn sich die wissenschaftlichen Expeditionen auch weniger weit ausdehnten, so waren in diesen unruhigen Zeiten die Hindernisse und Gefahren doch ebenso groß.

In Frankreich hatte Delambre gegen den Unverstand argwöhnischer Gemeindevertretungen zu kämpfen. Die so weit sichtbaren Kirchtürme lassen sich bekanntlich leicht genau visieren und dienen deshalb den Geodäten oft als Signale. Aber in den Gegenden, wo Delambre zu arbeiten hatte, gab es keine Kirchtürme. Irgendein Prokonsul hatte dieses Gebiet bereist und rühmte sich, alle Kirchtürme umgestürzt zu haben, die sich stolz über die bescheidenen Wohnungen der Sans-Culotten erhoben.

Man errichtete sodann Bretterpyramiden, die man mit weißer Leinwand bedeckte, um sie besser sichtbar zu machen. Das war aber ein neues Verbrechen: weiße Leinwand! Wer hatte die Kühnheit, auf unseren soeben befreiten Bergspitzen das verhaßte Banner der Gegenrevolution aufzupflanzen? Es blieb nichts anderes übrig, als die weiße Leinwand mit blauen und roten Bändern einzufassen.

Méchain arbeitete in Spanien; dort gab es andere, aber nicht geringere Schwierigkeiten. Die spanischen Bauern verhielten sich feindlich. An Kirchtürmen war dort kein Mangel: aber war es nicht ein Verbrechen gegen die Religion, auf ihnen geheimnisvolle Instrumente aufzustellen, die vielleicht gar mit dem Satan in Verbindung ständen? Die Revolutionäre Frankreichs waren allerdings die Verbündeten Spaniens, aber diese Verbündeten erschienen den Bauern reif für den Scheiterhaufen.

„Fortwährend", so schreibt Méchain, „droht man, uns zu erwürgen." Dank den Ermahnungen der Priester und den Hirtenbriefen der Bischöfe begnügten sich zum Glück die blutgierigen Spanier mit Drohungen.

Einige Jahre später unternahm Méchain eine zweite Expedition nach Spanien: er beabsichtigte, den Meridian von Barcelona bis zu den Balearen fortzusetzen. Es war das erstemal, daß man versuchte, die Triangulationen über einen breiten Meeresarm hinüber auszudehnen, indem man die auf einem hohen Berge einer entfernten Insel errichteten Signale beobachtete. Das Unternehmen war gut ausgedacht und gut vorbereitet; trotzdem mißglückte es. Der französische Gelehrte stieß auf alle möglichen Schwierigkeiten, über die er sich in seinen Briefen bitter beklagt. „Die Hölle", so schreibt er, vielleicht mit etwas Übertreibung, „die Hölle und alle Geißeln, die sie auf die Erde ausspeit, Sturm, Krieg, Pest und schwarze Intrigen sind gegen mich losgelassen!"

Tatsächlich fand er bei seinen Mitarbeitern mehr Hochmut und Starrsinn als guten Willen, und tausend Zufälligkeiten verzögerten seine Arbeit. Die Pest war nicht schlimm, die Furcht vor der Pest war mehr zu fürchten; jede dieser Inseln mißtraute den Nachbarinseln und fürchtete, daß von dort die Geißel der Pest über sie käme. Nur nach langen Wochen erhielt Méchain die Erlaubnis, sich einzuschiffen, und unter der Bedingung, alle seine Papiere mit Essig tränken zu lassen; Essig war das damalige Antiseptikum.

Entmutigt und krank bat er schließlich um seine Zurückberufung, starb aber vor seiner Rückkehr.

Arago und Biot erhielten den ehrenvollen Auftrag, das unvollendete Werk wieder aufzunehmen, und sie führten es glücklich durch.

Dank der Unterstützung der spanischen Regierung, sowie der Protektion mehrerer Bischöfe und vor allem eines berühmten Räuberhauptmanns schritten die Arbeiten schnell vorwärts. Sie waren glücklich beendigt, und Biot war nach Frankreich zurückgekehrt, als der Sturm losbrach.

Es war die Zeit, wo ganz Spanien zu den Waffen griff, um seine Unabhängigkeit gegen uns zu verteidigen. Weshalb bestieg dieser Fremde hohe Berge, und zu welchem Zwecke gab er von dort Signale? Offenbar doch nur, um die französische Armee herbeizurufen. Arago konnte der Volkswut nur dadurch entgehen, daß er sich als Gefangener den Behörden stellte. Im Gefängnisse hatte er das Vergnügen, in den spanischen Zeitungen den Bericht über seine eigene Hinrichtung zu lesen. Auch die damaligen Zeitungen brachten manchmal verfrühte Nachrichten. Er hatte wenigstens den Trost, zu erfahren, daß er mutig und christlich gestorben sei.

Selbst das Gefängnis war nicht mehr sicher; er mußte fliehen, und es gelang ihm, Algier zu erreichen. Dort schiffte er sich auf einem algerischen Schiffe nach Marseille ein. Dieses Schiff wurde von spanischen Seeräubern gefangen, und so wurde Arago nach Spanien zurückgebracht und von einem Gefängnisse in das andere geschleppt, von Ungeziefer geplagt und im schrecklichsten Elend. Der Dey von Algier hätte sich nicht gerührt, wenn es sich um seine Untertanen oder um seine Gäste gehandelt hätte. Aber an Bord des gekaperten Schiffes hatten sich zwei Löwen befunden, die der afrikanische Fürst als Geschenk für Napoleon bestimmt hatte. Der Dey drohte mit Krieg.

Das Schiff und die Gefangenen wurden also schließlich freigegeben. Da ein Astronom an Bord war, hätte die

Richtung der Weiterfahrt genau eingehalten werden können; aber der Astronom war seekrank, und die algerischen Seeleute, die eigentlich nach Marseille wollten, landeten in Bougi. Von dort begab sich Arago nach Algier, indem er, inmitten von tausend Gefahren, Kabylien zu Fuß durchwanderte. Noch lange wurde er in Afrika festgehalten und sogar mit dem Bagno bedroht. Endlich durfte er nach Frankreich zurückkehren; seine Beobachtungen, die er unter seinem Hemde verborgen hatte, und, was noch merkwürdiger ist, seine Instrumente, hatten diese schrecklichen Abenteuer unversehrt überstanden.

Bis dahin hatte Frankreich nicht nur den ersten Platz in der Geodäsie eingenommen, sondern hatte allein für diese Wissenschaft große Opfer gebracht. In den folgenden Jahren sind wir nicht untätig geblieben; unsere mustergültige Generalstabskarte ist ein Beweis dafür. Die neuen Beobachtungs- und Rechnungsmethoden hingegen kamen zu uns hauptsächlich von Deutschland und England.[82]) Erst seit etwa vierzig Jahren hat Frankreich seinen früheren Platz wieder eingenommen.

Frankreich verdankt dies einem gelehrten Offizier, dem General Perrier, der ein wahrhaft kühnes Unternehmen, die Verbindung von Spanien mit Afrika, erfolgreich durchgeführt hat. Auf vier Bergspitzen an den beiden Ufern des Mittelländischen Meeres wurden Stationen errichtet. Während langer Monate mußte man warten, bis die Atmosphäre ruhig und klar war. Endlich bemerkte man den dünnen Lichtstreifen, der über das Meer hin einen Weg von dreihundert Kilometern zurückgelegt hatte. Damit war das Unternehmen geglückt.

Heute verfolgt man noch kühnere Pläne. Von einem Berge bei Nizza sendet man Signale nach Korsika, aber nicht zu geodätischen Zwecken, sondern um die Geschwindigkeit des Lichtes zu messen. Die Entfernung beträgt nur 200 Kilometer; aber der Lichtstrahl muß den Weg hin und

zurück machen, denn er wird von einem in Korsika aufgestellten Spiegel zurückgeworfen. Er darf sich auch nicht unterwegs verlieren, er muß vielmehr ganz genau zu seinem Ausgangspunkte zurückkehren.

Seitdem hat Frankreich in seinem Eifer für die Geodäsie nicht nachgelassen. Wir haben nicht mehr über so erstaunliche Abenteuer zu berichten, aber die geleistete wissenschaftliche Arbeit ist außerordentlich groß. Das Territorium Frankreichs diesseits und jenseits der Meere wird allmählich mit Dreiecken überdeckt, die auf das genaueste gemessen sind.

Man stellt heute strengere Anforderungen, und was unsere Väter bewunderten, genügt uns nicht mehr. In dem Maße wie man nach größerer Genauigkeit strebt, wachsen die Schwierigkeiten beträchtlich; überall sind wir in Gefahr zu straucheln, und auf tausend unvermutete Fehlerquellen müssen wir gefaßt sein. Es ist deshalb notwendig, immer tadellosere Instrumente herzustellen.

Auch hierin hat sich Frankreich nicht überflügeln lassen. Unsere Apparate für die Basis- und Winkelmessung lassen nichts zu wünschen übrig; besonders erwähne ich noch das Pendel des Oberst Defforges, das die Messung der Schwere mit einer bisher ungekannten Genauigkeit auszuführen gestattet.

Die Zukunft der französischen Geodäsie liegt gegenwärtig in den Händen der geographischen Abteilung des Kriegsministeriums, deren Vorstände nacheinander die Generale Bassot und Berthaut waren. Man kann sich dazu nur beglückwünschen. Zur Durchführung geodätischer Arbeiten kommt es nicht allein auf die wissenschaftliche Tüchtigkeit an; unter jedem Klima muß man lange Strapazen ertragen können; der Chef muß sich auf den Gehorsam seiner Mitarbeiter verlassen können, und er muß diesen Gehorsam von seinen eingeborenen Hilfskräften erzwingen. Das sind militärische Eigenschaften. Man weiß übrigens, daß in unserer Armee die Wissenschaft stets gleichen Schritt mit dem Mute

gehalten hat. Eine militärische Organisation sichert übrigens die unentbehrliche Einheitlichkeit in der Durchführung. Es wäre viel schwieriger, anspruchsvolle Gelehrte zu gemeinsamer Arbeit zu bewegen, die auf ihre Unabhängigkeit eifersüchtig und um ihren sogenannten Ruhm besorgt sind, und die doch zur Erreichung eines gemeinsamen Zieles beitragen sollten, wenn sie auch durch große Entfernungen getrennt sind. Unter den früheren Geodäten gab es öfters Diskussionen, von denen manche viel Staub aufwirbelten. Die Streitigkeiten zwischen Bouguer und La Condamine haben unsere Akademie lange beschäftigt. Ich will nicht behaupten, daß Offiziere kein Temperament haben, aber die Disziplin bändigt ihre zu empfindliche Eigenliebe.

Mehrere auswärtige Regierungen haben sich an unsere Offiziere gewandt, um den geodätischen Dienst zu organisieren. Ein Beweis dafür, daß im Auslande der wissenschaftliche Einfluß Frankreichs noch heute besteht.

Unsere Techniker für Wasserbau haben ebenfalls einen ruhmreichen Anteil an dem gemeinsamen Werke. Die kartographische Aufnahme unserer Küsten und unserer Kolonien, das Studium von Ebbe und Flut bieten ein weites Feld ihrer Tätigkeit. Ich erwähne endlich das allgemeine Nivellement von Frankreich, das nach den genauen und geistreichen Methoden von Lallemand ausgeführt wird.

Mit solchen Männern können wir sicher in die Zukunft schauen; an Arbeit wird es ihnen nicht fehlen; unser Kolonialreich eröffnet ihnen weite, unerforschte Räume. Andererseits hat die internationale geodätische Assoziation die Notwendigkeit einer neuen Messung des Meridianbogens von Quito anerkannt, den früher La Condamine gemessen hatte. Mit dieser Arbeit wurde Frankreich betraut; es hatte ein wohlbegründetes Recht darauf, denn unsere Vorfahren haben die Kordilleren sozusagen wissenschaftlich erobert. Diese Rechte wurden auch von niemandem bestritten, und unsere Regierung beeilte sich, dementsprechend zu handeln.

Die Hauptleute Maurain und Lacombe führten eine erste Rekognoszierung aus; die Schnelligkeit, mit der sie schwierige Gebiete durcheilten und die steilsten Spitzen erklommen, um ihre Mission zu erfüllen, verdient alles Lob. Sie erregte die Bewunderung des General Alfaro, des Präsidenten der Republik Ecuador, der ihnen den Beinamen „Los hombres de hierro" (Die Männer von Eisen) beilegte.

Die definitive Expedition wurde von dem Oberstleutnant Bourgeois geführt. Die erhaltenen Resultate entsprachen den gehegten Erwartungen. Unsere Offiziere begegneten allerdings unvorhergesehenen klimatischen Schwierigkeiten. Mehr als einmal mußte einer von ihnen mehrere Monate in einer Höhe von viertausend Meter, in Nebel und Schnee ausharren, ohne irgend etwas von den Signalen zu sehen, auf die visiert werden sollte, die sich aber hartnäckig verhüllten. Dadurch entstand zwar eine Vermehrung der Kosten und eine Verzögerung der Arbeit, aber dank der Ausdauer und dem Mute unserer Offiziere hatte die Zuverlässigkeit der Messungen nicht darunter zu leiden.

Zusammenfassung.

Auf den vorstehenden Seiten versuchte ich auseinanderzusetzen, wie der Gelehrte es anfangen muß, unter den unzähligen Tatsachen, die sich ihm zur Erforschung darbieten, auszuwählen; obgleich nämlich eine Auswahl immer ein Opfer bedeutet, so zwingt ihn doch die natürliche Unzulänglichkeit des Geistes, eine Auswahl zu treffen. Zuerst habe ich es durch allgemeine Erörterungen erläutert, einerseits suchte ich die Natur des zu lösenden Problems klarzulegen, andererseits die Natur des menschlichen Geistes, der doch das wichtigste Hilfsmittel für die Lösung ist, besser verständlich zu machen. Sodann habe ich Beispiele vorgeführt; ich habe sie nur in beschränkter Zahl behandelt, denn auch ich mußte eine Auswahl treffen, und ich wählte natürlich die Probleme, die ich selbst am meisten studiert habe. Andere hätten sicher eine andere Wahl getroffen; aber darauf kommt es nicht an, sie wären schließlich zu denselben Schlußfolgerungen geführt worden.

Es gibt eine Hierarchie der Tatsachen: Die einen sind ohne Belang; ihre Existenz ist das einzige, was sie uns lehren. Der Gelehrte, welcher ihre Existenz festgestellt hat, erfährt dadurch nur diese eine Tatsache, ohne ein neues Mittel zur Voraussage neuer Tatsachen gewonnen zu haben. Derartige Tatsachen kommen, scheint es, wohl einmal vor, sind aber nicht dazu bestimmt, sich zu wiederholen.

Andererseits gibt es Tatsachen von großer Ergiebigkeit; jede von ihnen lehrt uns ein neues Gesetz. An sie muß sich der Gelehrte halten, da er nun einmal auf eine Auswahl angewiesen ist.

Diese Auswahl ist sicher nur relativ und von der Unzulänglichkeit unseres Geistes beeinflußt. Die Tatsachen von geringerer Ergiebigkeit sind die komplizierten Tatsachen, auf welche vielfache Umstände einen merklichen Einfluß ausüben können, Umstände, die zu zahlreich und zu verschiedenartig sind, als daß wir sie alle unterscheiden könnten. Eigentlich müßte ich sagen: es sind dies diejenigen Tatsachen, die wir für kompliziert halten, weil die begleitenden Umstände derartig verwickelt sind, daß unsere Geisteskräfte für deren Entwirrung nicht ausreichen. Ein Geist, der umfassender und feiner als der unserige angelegt ist, würde sicher die Tatsachen anders beurteilen. Aber das kann hier nicht in Frage kommen, denn wir verfügen nicht über diesen höheren Geist, sondern nur über den unserigen.

Die Tatsachen von großer Ergiebigkeit sind diejenigen, welche wir für einfach halten, entweder weil sie wirklich einfach sind und nur durch eine kleine Anzahl wohldefinierter Umstände beeinflußt werden, oder weil sie den Schein der Einfachheit erwecken, indem die verschiedenartigen Umstände, von welchen sie abhängen, den Gesetzen des Zufalls gehorchen und sich deshalb gegenseitig kompensieren. Das letztere tritt am häufigsten ein. Deshalb waren wir genötigt, das Wesen des Zufalls etwas näher zu prüfen. Die Tatsachen, auf welche die Gesetze des Zufalls anwendbar sind, werden dem Gelehrten zugänglich, während er vor der außerordentlichen Kompliziertheit anderer Probleme, auf die jene Gesetze nicht anwendbar sind, entmutigt dasteht.

Wie wir gesehen haben, lassen sich diese Betrachtungen nicht nur auf die physikalischen, sondern auch auf die mathematischen Wissenschaften anwenden. Für Physiker und für Mathematiker sind die Beweismethoden nicht dieselben, aber die Methoden der Erfindung sind für beide sehr ähnlich. Sie bestehen darin, daß man von der einzelnen Tatsache zum Gesetze aufsteigt, und daß man die-

jenigen Tatsachen aussucht, durch die man zu einem Gesetze geführt werden kann.

Um dies ganz klar zu legen, habe ich gezeigt, wie der Mathematiker geistig arbeitet, und zwar unter drei verschiedenen Formen: ich zeigte den Geist des Mathematikers beim Erfinden und beim Schaffen; ich zeigte den Geist des naiven Geometers, der zur Zeit unserer fernen Vorfahren oder in den unklaren Jahren unserer Kindheit uns instinktiv den ersten Begriff des Raumes beibrachte; ich zeigte den Jüngling, dem die Gymnasiallehrer die ersten Grundlagen der Wissenschaft enthüllen und Verständnis für die grundlegenden Definitionen beibringen. Überall erkannten wir die Rolle der Intuition und der Verallgemeinerung, wir sahen, daß ohne diese beiden Hilfsmittel die bezeichneten drei Klassen von Mathematikern eine wie die andere zur Ohnmacht verurteilt wären.

Bei dem Beweisverfahren selbst macht die Logik nicht alles aus; die richtige mathematische Schlußweise besteht in einer wirklichen Induktion, die zwar in mancher Beziehung von der physikalischen Induktion abweicht, aber doch wie diese vom Besonderen zum Allgemeinen fortschreitet. Alle Mühe, die man aufwandte, um diese Ordnung umzustürzen und um die mathematische Induktion auf die Regeln der Logik zurückzuführen, hat nur zu Mißerfolgen geführt, die durch Anwendung einer, dem Laien unverständlichen Sprache verdeckt wurden.

Die von mir den physikalischen Wissenschaften entlehnten Beispiele zeigten verschiedene Tatsachen von großer Ergiebigkeit. Das eine Experiment von Kaufmann revolutioniert zugleich die Mechanik, die Optik und die Astronomie. Weshalb? Weil wir das diese Wissenschaften einigende Band um so besser erkennen, je mehr sich diese Wissenschaften entwickeln, und weil wir eine Art von Generalplan für die Karte der universellen Wissenschaft entwerfen konnten. Es gibt Tatsachen, die mehreren Wissenschaften ge-

meinsam sind und die als gemeinsame Quelle von Strömen erscheinen, welche nach allen Richtungen auseinandergehen und dem Knotenpunkt des St. Gotthard vergleichbar sind, von dem vier verschiedene Flußgebiete ausgehen.

Überdies können wir die Auswahl der Tatsachen mit besserem Unterscheidungsvermögen als unsere Vorfahren treffen, welche diese Flußgebiete durch unüberschreitbare Gebirge getrennt dachten.

Es müssen immer einfache Tatsachen ausgewählt werden, aber unter diesen einfachen Tatsachen müssen wir diejenigen vorziehen, welche an solchen Knotenpunkten stehen, wie sie uns der St. Gotthard darstellt.

Werden die Wissenschaften nicht durch ein direktes Band verbunden, so fördern sie sich doch gegenseitig durch Analogie. Als man die Gesetze studierte, denen die Gase gehorchen, war man sich bewußt, eine Tatsache von großer Ergiebigkeit in Angriff genommen zu haben; und doch unterschätzte man noch diese Ergiebigkeit, denn unter einem gewissen Gesichtspunkte sind die Gase das Bild der Milchstraße, und die Tatsachen, die zuerst nur den Physiker zu interessieren schienen, eröffnen dem Astronomen ganz unerwartet neue Forschungsgebiete für die Zukunft.

Wenn endlich der Geodät bemerkt, daß er sein Fernrohr um einige Sekunden anders einstellen muß, um auf ein mit Mühe errichtetes Signal visieren zu können, so ist das an sich eine sehr unbedeutende Tatsache; diese wird aber zu einer Tatsache von großer Ergiebigkeit, wenn sie ihm die Existenz eines kleinen Buckels auf dem Geoide der Erde offenbart, und dieser kleine Buckel wäre an sich ohne großes Interesse, wenn er dem Geodäten nicht einen Wink über die Verteilung der Materie im Innern der Erde gäbe, und ihn dadurch über die Vergangenheit unseres Planeten, über seine Zukunft und über die Gesetze seiner ferneren Entwicklung aufklärte.

Erläuternde Anmerkungen

von F. Lindemann.

Um Wiederholungen zu vermeiden, wurde im folgenden öfter auf eine entsprechende Stelle des Werkes von Poincaré, „Wissenschaft und Hypothese" (deutsche Übersetzung), oder auf die deutsche in der gleichen Sammlung erschienene Ausgabe des Werkes von Picard, „Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft", verwiesen; das erstere Werk ist abgekürzt mit Po., WuH., das letztere mit Pi., WdG. bezeichnet.

Erstes Buch.

Forscher und Wissenschaft.

1) Seite 18. Vgl. Mach, Die ökonomische Natur der physikalischen Forschung, 1882; Populäre Vorlesungen, Wien 1896.

2) Seite 22. Die berühmte Abhandlung von Abel, in der zum ersten Male die Konvergenz der binonischen Reihe exakt behandelt wurde, erschien 1826 in Bd. 1 von Crelles Journal. Sie gilt noch immer als Muster derartiger Untersuchungen.

3) Seite 23. Die Bezeichnung „gleichmäßige Konvergenz" wurde von Weierstraß in die Theorie der unendlichen Reihen eingeführt (in seinen Vorlesungen); die Wichtigkeit des Begriffes war von Seidel zuerst erkannt, indem er nachwies, daß die Darstellung einer unstetigen Funktion durch eine Reihe, deren einzelne Glieder stetige Funktionen sind, dadurch ermöglicht wird, daß die Reihe an der Unstetigkeitsstelle ungleichmäßig konvergiert: Note über die Eigenschaft der Reihen, welche diskontinuierliche Funktionen darstellen, Abhandlungen d. bayer. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Klasse, Bd. 5, 1848.

4) Seite 25. Über den Gruppenbegriff vgl. Po., WuH. S. 66, 72f., sowie Pi., WdG. S. 34 und Anmerk. 19) und 41). — Der Begriff der Invariante ist aus der Zahlentheorie in die Algebra und Analysis unter ständiger Erweiterung seiner Bedeutung hinübergetragen. Man nannte so ursprünglich solche Funktionen der Koeffizienten von ganzen Funktionen einer Variabeln (oder zweier homogener Variabeln), die bei linearer Transformation sich nur um einen Faktor ändern, dann allgemeiner ganze Funktionen dieser Koeffizienten und anderer Variabeln (so daß man auch Kovarianten und



zugehörige Formen mit inbegriff); vgl. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie Bd. I; in der jetzt erscheinenden zweiten Auflage sind auch die Verallgemeinerungen auf transzendente Funktionen (insbesondere Lösungen linearer Differentialgleichungen) angedeutet. Noch allgemeiner spricht man nach Halphen und Lie von Differentialinvarianten, vgl. Pi., WdG. Anmerk. 20.

5) Seite 28. Die in einem Anagramm versteckte Mitteilung über seine Entdeckung hatte Newton nicht direkt an Leibniz gemacht, sondern an ihren beiderseitigen Freund Oldenburg in einem Briefe vom 24. Oktober 1676 (vgl. Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, herausgegeben von Gerhardt, Berlin 1899, S. 224). Die betreffende Stelle lautet:

„Ad quae solvenda (nämlich inversa de Tangentibus Problemata aliaque illis difficiliora) usus sum duplici Methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est impraesentia literis transpositis consignare, ne propter alios idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare cogerer. 5*accdae* 10*effh* 12*i* 4*l* 3*m* 10*n* 60*qqr* 7*s* 11*t* 10*v* 3*x*: 11*ab* 3*cdd* 10*eaeg* 10*ill* 4*m* 7*n* 6*o* 3*p* 3*q* 6*r* 5*s* 11*t* 7*vx*, 3*acae* 4*egh* 6*i* 4*l* 4*m* 5*n* 8*oq* 4*r* 3*s* 6*t* 4*v*, *aaddaeeeeeeiiimmnnooprrrsssssttuu*."

Dieser Brief wurde auch in dem auf Veranlassung der Royal Society bei Gelegenheit des Prioritätsstreites zwischen Newton und Leibniz herausgegebenen „Commercium epistolicum" abgedruckt, und Wallis gibt dort folgende Bedeutung der Zeichen:

„Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis (d. h. des Integrals y) ex aequatione simul involvente fluxionem ejus (d. h. den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$): altera tantum in assumptione Seriei pro quantitate qualibet ignota, ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae Seriei" (das ist in der Tat die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung durch eine Potenzreihe).

In demselben Briefe (vgl. ibid. S. 208) teilt Newton folgendes Anagramm mit: „Fundamentum harum operationum (nämlich: Questiones de Maximis et Minimis, aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor) sic potius celavi: 6*accdae* 13*eff* 7*i* 319*n* 4049*rr* 459*t* 12*vx*." Und hierfür gibt Wallis folgende Erklärung: „Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa" (vgl. auch Buch II der Principia philosophiae naturalis, wo Newton diese Erklärung wiederholt). Es ist wohl evident, daß Leibniz diesen beiden Anagrammen die Newtonschen

Methoden nicht entnehmen konnte, vielmehr die entsprechenden selbständig entwickelte, bzw. schon früher entwickelt hatte; in einem Briefe an Conti vom 9. April 1716 (a. a. O. S. 283) schreibt Leibniz darüber: „Il n'y a pas la moindre trace ni ombre du Calcul des Différences ou Fluxions dans toutes les anciennes Lettres de M. Newton que j'ai vûes, excepté dans celle qu'il a écrite le 24 Octobre 1676, où il n'en a parlé que par énigme, et la solution de cette énigme qu'il n'a donnée que dix ans après (eben in seinen Principia l. c.), dit quelque chose mais elle ne dit pas tout ce qu'on pourrait demander."

6) Seite 29. Der erste Internationale Mathematische Kongreß fand 1897 in Zürich statt, der zweite 1900 in Paris (unter dem Präsidium von Poincaré), der dritte 1904 in Heidelberg, der vierte 1908 in Rom, der fünfte 1912 in Cambridge. Poincaré hatte stets das lebhafteste Interesse für solche internationale Beziehungen, wie er sich auch an den Versammlungen der internationalen Assoziation der Akademien lebhaft und tätig als Vertreter der Pariser Académie des Sciences beteiligte; vgl. Pi., WdG. Anmerk. 3. Die Verhandlungen und Vorträge auf den erwähnten Kongressen sind in besonderen Publikationen gesammelt. In Deutschland veranstaltet die Deutsche Mathematiker-Vereinigung jährliche Zusammenkünfte in Verbindung mit der Deutschen Naturforscher-Versammlung, worüber die Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung berichten. Daß auch Mißstände mit derartigen Versammlungen verbunden sind, hebt Volkmann mit Recht hervor (Erkenntnistheoretische Grundzüge, 2. Aufl., Leipzig 1910, S. 337).

7) Seite 30. Die Analogie zwischen transzendenten Funktionen (z. B. Exponentialfunktion) und transzendenten Zahlen (z. B. e und π, vgl. Po., WuH. Anmerk. 97) führte z. B. zu der Frage, ob ganze transzendente Funktionen mit rationalen Koeffizienten für algebraische Argumente algebraische Zahlen darstellen können; vgl. darüber Faber, Math. Ann. Bd. 58, 1903, und Stäckel, eb. Bd. 46, 1894. — Andere Analogien zwischen arithmetischen und analytischen Theorien ergeben sich durch das Studium der algebraischen Zahlen, vgl. Dedekind und Weber in Bd. 92 von Crelles Journal, sowie Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1908, und: Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, eb. 1902.

8) Seite 31. In der Theorie der algebraischen Gleichungen tritt natürlich die Frage nach den Wurzeln und ihrer Bestimmung in den Vordergrund, während für die Invariantentheorie andere Gesichtspunkte maßgebend sind. Viele Probleme dieser Theorie kann man z. B. nach Sylvester und Hilbert derartig formulieren, daß gewisse

Formen (irrationale Kovarianten) gesucht werden, die zu gegebenen Formen in invarianter Beziehung stehen; vgl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, 2. Aufl., S. 768ff. (das Schlußheft erscheint demnächst). Historisch ist die Invariantentheorie bekanntlich aus Fragestellungen der Zahlentheorie erwachsen. — Für Untersuchungen über Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sei auf die Arbeiten von Hilbert und Hurwitz (Acta mathemat. Bd. 14, 1890/91), Poincaré (Liouville's Journ. Ser. 5, t. 7, 1901) und v. Sz. Nagy (Math. Annalen Bd. 73, 1912) verwiesen.

9) Seite 33. Über die Analysis situs vgl. Po., WuH. Anmerk. 14; ferner für mehrdimensionale Räume die Arbeiten von Poincaré selbst (vgl. die Zusammenstellung bei E. Lebon, Henri Poincaré, Biographie et Bibliographie, 2nd éd. Paris 1912).

10) Seite 34. Vgl. die Literaturangaben zu Pi., WdG. Anmerk. 29. Die Paradoxe der Mengenlehre kommen in den späteren Kapiteln des vorliegenden Werkes zu eingehender Erörterung.

11) Seite 35. Vgl. Po., WuH. Anmerk. 25. Das Hilbertsche Werk „Grundlagen der Geometrie" ist inzwischen in mehreren Auflagen erschienen (Leipzig, B. G. Teubner); man findet dort auch weitere Literaturangaben.

12) Seite 38. Über das Schachspiel vgl. Po., WuH. S. 4 und 17. Zu der oben auf S. 35 erwähnten Enquete hat Poincaré selbst Beiträge geliefert: H. Fehr, Th. Flournoy et Ed. Claparède, Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens, Enseignement mathématique, 1908. Über die Arbeitsmethoden von H. Poincaré vgl. auch Dr. Toulouse, Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle, vol. II, H. Poincaré, Paris 1910; vgl. auch weiter unten S. 41ff. des vorliegendes Werkes.

13) Seite 42. Nach Analogie zu der Jacobischen Θ-Funktion einer Variabeln bzw. der Riemannschen Θ-Funktion mehrerer Variabeln, die sich um einen (von den Variabeln abhängigen) Faktor ändern, wenn diese Variabeln sich um additive Konstante ändern, hat Poincaré zuerst (1881) eine von ihm als Fuchssche Θ-Funktion bezeichnete Funktion einer komplexen Variabeln $z = x + iy$ konstruiert (d. h. durch eine konvergente unendliche Reihe dargestellt), die der Bedingung

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z) \cdot (\gamma_i z + \delta_i)^{2m}$$

genügen, wo m eine ganze Zahl bezeichnet und die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ die Koeffizienten der Substitution einer unendlichen Gruppe sind. Diese Funktionen dienen Poincaré (Acta math. Bd. 1) zur Darstellung von automorphen Funktionen $f(z)$, die der Bedingung

$$f\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = f(z)$$

genügen, und zwar als Quotienten von zwei derartigen Θ-Funktionen. Die Existenz von automorphen Funktionen und die Definition derselben durch eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Lösungen Quotienten von Integralen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, hatte schon Schottky erkannt: Crelles Journal Bd. 83, 1877, und in besonderen Fällen die Funktion dargestellt. Von der Theorie der Riemannschen Flächen aus war Klein auf die automorphen Funktionen geführt; vgl. die Literaturangaben in Po., WuH. Anmerk. 23 u. 31. Den besonderen Fall der Modulfunktionen, der auf die hypergeometrischen Reihen führt, hatte Schwarz behandelt: Crelles Journal Bd. 75, 1872.

14) Seite 43. Die Identität der Bewegungen der nicht-euklidischen Geometrie mit den linearen Transformationen einer quadratischen Form in sich hat Klein zuerst erkannt, vgl. Po., WuH. Anmerk. 20 u. 30.

15) Seite 43. Vgl. oben Anmerk. 13 und in betreff der Angaben aus dem Leben Poincarés die in Anmerk. 9 erwähnte Biographie.

16) Seite 48. Vgl. die Ausführungen auf S. 12ff. über die Größe und Schönheit der Wissenschaft, sowie entsprechende Bemerkungen bei Pi., WdG. S. 5f.

17) Seite 53. Vgl. Po., WuH. S. 184ff.

18) Seite 55. Die Erfolge der Lebensversicherung beruhen bekanntlich auf strikter Anwendung der Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grundlage der in den Sterbetafeln niedergelegten Erfahrungen. Die Theorie ist z. B. dargestellt von Zillmer, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, 2. Aufl., Berlin 1887.

19) Seite 58. Vgl. Po., WuH. S. 196ff. und Anmerk. 98.

20) Seite 58. Vgl. Po., WuH. S. 202 und Anmerk. 98.

21) Seite 60. Allgemeiner kann man dies dahin aussprechen, daß die mathematische Physik zwar gestattet, aus gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen und Anfangszuständen auf den Ablauf einer Erscheinung für die Zukunft, nicht aber für die Vergangenheit zu schließen. Ist z. B. das Problem gegeben, die Wärme u einer unendlich ausgedehnten Platte, die von zwei parallelen Ebenen ($x = 0$ und $x = c$) begrenzt wird, für eine Zeit t zu bestimmen, falls die Bedingungen

$$u = f(x) \text{ für } t = 0, \quad u = 0 \text{ für } x = 0, \quad u = 0 \text{ für } x = c$$

gegeben sind, so ist die Lösung bekanntlich

$$u = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{c} x \int_0^c f(\lambda) \sin \frac{n\pi}{c} \lambda d\lambda,$$

wo a die Konstante in der Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

bedeutet. Die Reihe für u ist nur für positive Werte von t konvergent, und die Lösung verliert für negative Werte von t jede Bedeutung.

22) Seite 63. Vgl. Po., WuH. S. 208ff. und Anmerk. 99.

23) Seite 68. Über den Begriff der mathematischen Hoffnung vgl. Po., WuH. Anmerk. 98.

24) Seite 75. Vgl. Po., WuH. S. 181 und Anmerk. 89.

25) Seite 77. Bridoye ist eine typische Figur der französischen Literatur, nämlich jener Richter in Myrhingues, der den Ausfall seiner Urteile durch Würfel bestimmte. Condorcet († 1794 durch Gift im Kerker als Opfer der Revolution) versuchte zuerst die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Beurteilung der Gerechtigkeit der richterlichen Urteile und weiter der Wahlen zu verwerten: Mémoire sur l'instruction publique, t. 9 und: Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales, t. 21 der Œuvres (herausgegeben 1804), vgl. seine Mémoires diverses sur les probabilités (Mémoires de l'acad. des sciences, 1781). Seine Untersuchungen wurden von Laplace (Théorie analytique des probabilités, zuerst 1812), Lacroix (Traité élémentaire du calcul des probabilités, 3. Aufl. 1833, S. 251ff.) und Poisson (Recherches sur la probabilité des jugements, Paris 1837) dargestellt und erweitert. — Diese Theorien sind vielfach angegriffen, da die gemachten Voraussetzungen so beschränkt sind, daß sie mit den Verhältnissen der Wirklichkeit nicht übereinstimmen; eine Critique gibt J. Bertrand, Calcul des probabilités, 2. Aufl. Paris 1907, S. 311ff.; vgl. auch Mansion, Sur la portée objective du calcul des probabilités, Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, Bruxelles 1903.

26) Seite 78. Vgl. Po., WuH. S. 193f.

Zweites Buch.

Die mathematische Schlußweise.

27) Seite 87. Über die Relativität des Raumes vgl. Po., WuH. S. 79ff., über die Unmöglichkeit der Entscheidung zwischen euklidischer und nicht-euklidischer Geometrie, eb. S. 66ff. und über die Deformation von Lorent und Fitzgerald, ebd. Anmerk. 85.

28) Seite 92. In den halbzirkelförmigen Kanälen des Bogenapparates im Ohre glaubt man eine Art Sinnesorgan für die Wahrnehmung der Kopfstellung und dadurch für die Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes zu erkennen. Die drei Bogengangpaare sind nämlich in drei zueinander rechtwinkligen Ebenen des Raumes angeordnet. Tiere, bei denen einzelne Bogengangapparate verletzt werden, zeigen bestimmte Orientierungsstörungen und eigentümliche Kopfhaltungen. Vielleicht kommt auch anderen Apparaten in den Vorhofsäckchen eine ähnliche Rolle zu. Vgl. von Cyon, Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne von Raum und Zeit, Berlin 1908. Den weitgehenden Folgerungen des Verfassers in bezug auf nicht-euklidische Geometrie usw. wird man nicht zustimmen können.

29) Seite 100. Über die Mechanik von Hertz vgl. Po., WuH. Anmerk. 54. — Ein anderer Versuch, die mehrdimensionale Geometrie für die Anwendungen nutzbar zu machen, rührt von Minkowski her, bei dem die Zeit als vierte Dimension eingeführt wird, und der dazu durch die Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper geführt wurde, vgl. Pi., WdG. Anmerk. 79.

30) Seite 107. Über die Rolle der Intuition und der Logik in der Mathematik vgl. Poincaré, Comptes rendus du deuxième Congrès international des Mathématiciens, Paris 1902, S. 115 ff. — Die beiden verschiedenen Arten mathematischer Forschung schildert auch Clebsch, Zum Gedächtnis an Julius Plücker, Abhandlungen d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, 1872.

31) Seite 108. Vgl. oben Anmerk. 11.

32) Seite 110. Vgl. Po., WuH. S. 31 und Anmerk. 12.

33) Seite 110. Vgl. Po., WuH. Anmerk. 4 und 10.

34) Seite 112. Vgl. den Bericht von Pringsheim, „Grundlagen der allgemeinen Funktionentheorie" in der Enzyklopädie der math. Wiss. 1899; Pringsheim selbst hat solche Funktionen mit unerwarteten Eigenschaften mehrfach konstruiert; z. B. Sitzungsberichte d. Kgl. bayr. Akad. d. Wiss. 1892 und 1895.

35) Seite 114. Über die Schwierigkeiten bei Definition des Inhaltes einer krummen Oberfläche vgl. das Beispiel von Peano und Schwarz, vgl. Pi., WdG. Anmerk. 26; über die Definition des Bruches vgl. Po., WuH. Anmerk. 6.

36) Seite 117. Über die hier aufgeworfenen pädagogischen Fragen vgl. Po., WuH. Anmerk. 10. — Weshalb sich Poincaré hier gerade auf die „Oberlehrer allemands" bezieht, ist nicht ganz klar; doch geben ihm Ausführungen, wie z. B. diejenigen von Junge (Die unpraktische Schulmathematik, Pädagogisches Archiv, 49. Jahrgang, 1907) recht; die von diesem vertretenen Ansichten geben ein trau-

riges Bild von der drohenden Dekadenz des mathematischen Unterrichts, sie würdigen in der Tat die Mathematik zu einer „tachymétrie de bas étage“ herab.

Die von Poincaré dargelegten Anschauungen stimmen mit den von mir in meiner Rektoratsrede (Lehren und Lernen in der Mathematik, München 1904) vertretenen überein, vor allem in der Betonung der Notwendigkeit, den Schülern in den oberen Klassen einen Begriff von der Großartigkeit des logischen Aufbaues der mathematischen Wissenschaft und von dem inneren Zusammenhang ihrer Teile zu geben, ohne dabei Anschauung und Intuition zu vernachlässigen. Wenn Volkmann meint (Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften, 2. Aufl. S. 330, Leipzig 1910), daß ein großer Teil des Inhaltes meiner soeben zitierten Rede auf dem Einblick in den Schulbetrieb beruhe, den ich in Königsberg dadurch gewann, daß damals die in den Provinzen Ost- und Westpreußen im Jahre 1882 gelieferten mathematischen Abiturientenarbeiten mir zur Begutachtung vorlagen, so ist das nur zum Teil zutreffend. Schon während der Zeit, wo ich 1873—75 mit Klein zusammen in Erlangen und München arbeitete, waren die Kluft zwischen Schul- und Universitätsmathematik und die Notwendigkeit von Reformen häufig Gegenstand unserer Unterhaltungen; und was ich später in Königsberg (wo der Verkehr mit Gymnasiallehrern sehr rege war) und in München durch Lehrer und Schüler erfuhr, zusammen mit den Erinnerungen an den selbst auf dem Gymnasium (in Schwerin i. M.) genossenen äußerst anregenden Unterricht, hat mein Interesse an diesen Fragen stets wach gehalten; auch meine (nicht veröffentlichte) Königsberger Rektoratsrede (Ostern 1893) beschäftigte sich mit denselben. Klein hat ihnen bekanntlich später sehr viel Zeit und Arbeit gewidmet (vgl. seine Vorträge über den mathematischen Unterricht, Leipzig 1907), denn die Veröffentlichungen der von der Deutschen Naturforscherversammlung eingesetzten Kommission zur Unterrichtsreform (vgl. Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Leipzig 1907, und Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranstaltet durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, Leipzig bei B. G. Teubner) gehen wesentlich auf seine Anregungen zurück; vgl. ferner: Simon, Über die Entwicklung der Elementarmathematik im 19. Jahrhundert, Leipzig 1906 (auch Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband 1). In Königsberg suchte ich durch Stellung entsprechender Themata für diejenigen Kandidaten, die sich um die Lehrbefähigung in den mittleren Klassen bewarben, und durch besondere Vorlesungen über die Grundbegriffe der Geometrie und über

Euklid das Interesse an dem logischen Aufbau der Geometrie und an Euklids Werke zu heben. Auf letztere ging ich in dem zweiten Teile der Vorlesungen über Geometrie (1891) ausführlich ein, um die Stellung der Euklidischen Axiome zu denen der projektiven Geometrie klarzulegen.

In der erwähnten Rede hatte ich besonders hervorgehoben, daß der Unterricht an den Schulen den Schülern, und somit den Gebildeten im allgemeinen, keinen richtigen Begriff vom Wesen (und Nutzen) der Mathematik gibt; wie recht ich damit hatte, zeigt die verständnislose Besprechung der Rede in der Tagespresse, zeigt noch mehr der von einem Gymnasialprofessor ausgehende persönliche Angriff abgeschmackter Art in den „Blättern für das bayrische Gymnasialwesen“: mein Artikel in Nr. 160 der Münchener Neuesten Nachrichten vom 5. April 1905 war dadurch veranlaßt. Im Sinne der von mir und anderen ausgesprochenen Forderungen ist inzwischen manches durch Änderung der Lehrpläne (Einführung der Elemente der analytischen Geometrie und des Funktionsbegriffes) geschehen. Was ich über den schädlichen Einfluß der Skriptionen (oder Extemporale) sagte, wird durch den vom preußischen Kultusministerium herausgegebenen „Erlaß über das Extemporale“ bestätigt (vgl. Münchener Neueste Nachrichten 1911, Nr. 299, 27. Okt.); der Forderung nach Berücksichtigung der historischen Entwicklung ist in gewissem Sinne dadurch entsprochen, daß die neue Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten in Bayern gewisse historische Kenntnisse fordert; vgl. auch Wieleitner, Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten in Bayern, Leipzig 1910 (Bd. II, Heft 1 der oben erwähnten „Abhandlungen“). Über die a. a. O. von mir besprochene Stellung der Mathematik zu den humanistischen Fächern und den sogenannten Geisteswissenschaften vgl. auch Königsberger, Sitzungsber. der Heidelberger Akademie der Wiss. Math.-naturw. Klasse, Festrede vom 24. April 1913. — Analoge Fragen für die Physik behandelt Volkmann, Fragen des physikalischen Schulunterrichtes, Leipzig 1913.

37) Seite 121. Über die Definition der geraden Linie vgl. Po., WuH. S. 47 und 76 und Anmerk. 26.

38) Seite 122. Sarcey (1828—99) war ein besonders populärer Theaterkritiker (Quarante ans de théatre, 8 Bde, 1900—02), wirkte auch in antiklerikalem Sinne publizistisch für die französische Unterrichtsreform.

39) Seite 123. In einer Ebene gibt es zweifach unendlich viele gerade Linien; wenn dem Lineale drei Freiheitsgrade zugeschrieben werden, so ist zu bedenken, daß das Lineal noch längs einer Ge-

raden verschoben werden kann; in diesem Sinne hat die Gerade auf einem Kegel oder Zylinder zwei Freiheitsgrade.

40) Seite 123. Über die Rolle der starren Körper in der Geometrie, vgl. Po., WuH. S. 62ff. („wenn es keine starren Körper in der Natur gäbe, so hätten wir keine Geometrie"). Es entsteht die Frage, woran man die Unveränderlichkeit der Form eines Körpers erkennen soll, wenn umgekehrt der starre Körper erst zur Definition der Längen und der Abstände dient? Hier scheint ein von Russell hervorgehobener circulus vitiosus zu bestehen (vgl. Mannoury, Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik, Haarlem 1909, S. 183). Nach Poincaré indessen ist nicht der starre Körper als solcher, sondern die Gruppe seiner Bewegungen das entscheidende, und diese Gruppe kann man durch lineare Transformationen darstellen; die in letzteren vorkommenden Koordinaten aber können direkt projektivisch (also nicht durch Benutzung des Enfernungsbegriffes) definiert werden; so deckt sich indirekt meine Einführung dieses Begriffes als Invariante für die erwähnte Gruppe (in den Vorlesungen über Geometrie, Bd. 2) mit Poincarés Betonung der Existenz von starren Körpern und der Gruppenvorstellung; vgl. meine Anmerk. 24 und 30 zu Po., WuH.

41) Seite 125. Über die Definition der Kraft vgl. Po., WuH. S. 100ff.

42) Seite 127. Vgl. Po., WuH. S. 109ff. und Anmerk. 56.

43) Seite 129. Die grundlegenden Arbeiten von Cantor finden sich im Bd. 20, 21 und 23 der Math. Annalen, 1882—84, und Bd. 46; vgl. ferner Schönflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten; Ergänzungsband 2 der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig 1908, und Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906 (Abhandlungen der Friesschen Schule, Bd. I, Heft 4). — Die nachfolgenden Erörterungen veröffentlichte Poincaré zuerst in der Revue de métaph. et de morale, t. 14, 1906.

44) Seite 131. Vgl. L. Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, deutsch von C. Siegel, Leipzig 1908. Als Anhang ist Couturats Rede zum Kantjubiläum (aus der Revue de métaph. et de morale, 1904) in deutscher Übersetzung abgedruckt.

45) Seite 136. Vgl. Po., WuH. S. 51 und 140. — Die sogenannten Größenaxiome Euklids (d. i. αἰτήματα) hatte ich schon 1891 in den „Vorlesungen über Geometrie" als Sätze zur Definition der Begriffe „gleich", „größer" und „kleiner" angesprochen; vgl. auch meine Anmerk. 13 zu Po., WuH., sowie die Darstellung bei Dingler, Die Grundlagen der angewandten Geometrie, Leipzig 1911, S. 110ff.

46) Seite 144. Die einschlägigen Publikationen von Peano sind: 1883: Calcolo geometrico, preceduto dallo operazioni della logica deduttiva; 1894: Introduction au Formulaire de Mathématiques; 1891—95: Formulaire de Math. (in der Rivista di Matematica), auch besonders erschienen, nebst den 1897, 1898 und 1899 veröffentlichten Fortsetzungen und weiteren Abhandlungen in der erwähnten Turiner Zeitschrift; 1903/4 erschien die 4. Auflage. Vgl. auch die Darstellung bei Padoa, Conférences sur la Logique mathématique, Bruxelles 1898 (lithographiert). Der Zweck dieser Zeichenschrift ist hauptsächlich, bei logischen Schlüssen alle Beweisquellen auszuschließen, die nicht in den axiomatischen Annahmen und in den Definitionen enthalten sind, und die sich beim Gebrauch von Worten stets leicht einschleichen, da den Worten meist ein weiterer Sinn anhaftet, als nach den gegebenen Definitionen derselben statthaft wäre. Das Wort Pasigraphie wurde von Schröder eingeführt (Mitteilung auf dem Internat. Math. Kongreß in Zürich).

Dasselbe hatte früher schon Frege mit seinem Werke „Die Begriffsschrift" (Halle 1879) angestrebt; vgl. auch dessen Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, und Grundgesetze der Arithmetik, Jena 1893.

Auf die von Poincaré hier an den Arbeiten von Burali-Forti und Couturat geübte Kritik hat letzterer geantwortet: Revue de métaphysique et de morale, t. 14, 1906, p. 208ff. (englische Übersetzung mit Zusätzen von Jourdain in The Monist, vol. 22, 1912, p. 482ff.). Couturat hebt hervor, daß die von Burali-Forti gegebene (oben S. 143 mitgeteilte) Definition der Einheit nicht die Zahl 1 definiert, sondern dazu dient, die Ordinalzahl 1 mittels der Kardinalzahl 1 zu definieren, so daß hier kein circulus vitiosus vorliegt. Ebenso soll die Gleichung $1 \varepsilon No$ nicht bedeuten „Eins ist eine Zahl" sondern: „Eins ist eine Ordinalzahl" (womit dann durch Anführung eines Beispiels bewiesen ist, daß die Klasse der Ordinalzahlen existiert).

Die weiterhin zitierte Formel $\varphi x = \Lambda \cdot \supset \cdot \Lambda = x \ni \varphi x$ (welche auf S. 27 des oben in Anmerk. 44 erwähnten Werkes von Couturat vorkommt und daselbst den später zu erwähnenden Arbeiten Russells entnommen ist) dient nach Couturat nicht zur Definition der Null, sondern bedeutet: „Λ ist die Klasse derjenigen Objekte, welche einer Bedingung genügen, die immer falsch ist, d. h. für alle Werte falsch ist, die man dem Zeichen x beilegen kann." Das Zeichen Λ bedeutet „immer falsch" im Gegensatze zu V = immer richtig; obiger Satz dient zur Definition der „Nullklasse". Das Zeichen ι verwandelt ein Individuum in eine „singuläre Klasse", die logisch von dem einzigen Individuum zu unterscheiden ist, das sie

enthält. Die Gleichung $0 = \iota\Lambda$ bedeutet also: Null ist das einzige Element der singulären Klasse, die durch obigen Satz definiert ist. Schließlich ist also „Null" definiert durch die Worte „immer falsch", die Poincaré negativ mit „in keinem Falle erfüllt" wiedergibt.

Hiermit ist das Zeichen 0 zurückgeführt auf das Zeichen Λ: „Vergleicht man die Algebra der symbolischen Logik mit der gewöhnlichen Algebra, so tritt Λ an die Stelle von 0" (vgl. Russell und Whitehead, Principia Mathematica, vol. 2, 1910, S. 229). Die arithmetische Null (Kardinalzahl 0) wird sodann mittels der logischen Null definiert (Couturat a. a. O. S. 49), und zwar nach Whitehead (Americain Journ. of Math. vol. 14, 1902) wieder mittels der Gleichung $0 = \iota\Lambda$.

Die Definition der Zahl 1 lautet (a. a. O. S. 27) nach Frege und Russell:

$$a - = \Lambda : x \varepsilon a \cdot y \varepsilon a \cdot \supset_{x,y} \cdot x \equiv y,$$

was Couturat in Worten so wiedergibt: „Eine Klasse a ist singulär (hat die Klassenzahl 1), wenn sie existiert (nie Null ist) und wenn zwei beliebige Individuen, die ihr angehören, identisch sind", oder in anderen Worten (ibid. S. 63): „1 ist die Klasse (die Kardinalzahl) der Klassen u (die nicht Null sind) von der Art, daß, wenn x und y Elemente von u sind, sie notwendigerweise identisch sind." Das Wort „zwei" kommt allerdings in der Definition durch obige Gleichung nicht vor, sondern nur in der beigefügten Erläuterung. Es kommen aber mehrere Individuen (x und y) vor; es wird also der Begriff der Vielheit (Zweiheit) vorausgesetzt, und es entsteht die Frage, ob man die Vielheit verstehen kann, ohne die Einheit vorauszusetzen, oder in anderen Worten, ob die Worte „ein Glied" bereits die Zahl 1 voraussetzen, oder ob der abstrakte Begriff „Eins" erst daraus abzuleiten ist; vgl. Russell, The Principles of Mathematics, vol. I, 1903, S. 111ff. und S. 520 und Whitehead und Russell, a. a. O. S. 37 und S. 363ff.

Für die Auflösung der Antinomie von Burali-Forti vgl. vol. I, S. 66, und vol. III, S. 73ff. des letztgenannten Werkes, ferner: Schönfließ, Jahresber. der Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 15 (1906) und Bd. 20 (1911); Dingler, Zeitschr. für positivistische Philosophie, Jahrg. 1, 1913.

47) Seite 146. Die Arbeiten Russells sind in den Werken zusammengefaßt, die soeben in Anmerk. 46 zitiert wurden; als seine Vorgänger in der Entwicklung der formalen Logik sind vor allem Boole (Laws of thought, 1854) und Schröder (Vorlesungen über die Algebra der Logik, Leipzig 1890—95), zu nennen. Der Ausspruch Russells über die falschen Urteile findet sich z. B. S. 103

im vol. I des von ihm und Whitehead verfaßten Werkes; vgl. Couturat, a. a. O. S. 13 und 16.

48) Seite 149. Die hier zitierten Sätze finden sich bei Couturat, a. a. O. S. 9, S. 26, S. 32 und S. 30; sie geben Sätze von Russell in anderer Form wieder. Letzterer (The Principles of Math. S. 14 ff.) vermeidet das Wort „zwei“, indem er zwei Buchstaben p und q einführt (vgl. auch S. 114 ff. in vol. I der Principia mathematica). Es entsteht also, wie bei Definition der Einheit (vgl. Anmerk. 46) die Frage, ob die Vorstellung von zwei verschiedenen Dingen schon die Vorstellung der abstrakten Zahl zwei einschließt; letzteres geben die Logiker nicht zu, und darin liegt die Differenz der Anschauungen.

49) Seite 150. In dem Axiom II findet sich ein Druckfehler: es muß heißen „keine“ statt „eine“. — Vgl. Peano, Arithmetices principia nova methodo exposita (Turin 1889); Sul concetto di numero, Rivista di Mat. t. 1, 1891; Arithmetica generale e Algebra elementare (Turin 1902); vgl. Couturat, a. a. O. S. 57 ff., wo auch die von Padoa (Théorie des nombres entiers absoluts, Rivista di Mat. t. 8, 1902) gegebene Vereinfachung angeführt ist, indem von den drei Zeichen 0 (= Null), N (= ganze Zahl) und seq (= folgend auf) das erste auf die beiden anderen zurückgeführt wurde, während Russell die 0 als Kardinalzahl der Klasse Null (vgl. die logische Definition), 1 als Kardinalzahl der Einzelklasse definiert (vgl. oben Anmerk. 46).

50) Seite 151. Vgl. Hilbert, Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des III. internat. Math.-Kongresses in Heidelberg 1904, abgedruckt als Anhang zur 3. Aufl. von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“.

51) Seite 156. Es bezieht sich darauf, daß Hilbert (Grundlagen der Geometrie, S. 24 ff.) die Widerspruchslosigkeit seiner Axiome durch Berufung auf parallele arithmetische Schlußweisen dartut.

52) Seite 158. In der oben in Anmerk. 46 erwähnten Abhandlung versucht Couturat einen Beweis für die beiden hier von Poincaré angeführten Sätze zu geben. Diese Sätze sind:

1. Eine endliche ganze Zahl ist eine solche, die durch sukzessive Additionen erhalten werden kann, und bei der niemals n gleich $n - 1$ ist.

2. Eine ganze Zahl ist eine solche, von der man behaupten kann, daß für keinen Schluß, dessen Nummer eine ganze Zahl ist, jemals ein Widerspruch zu befürchten ist, wenn die Widerspruchslosigkeit . . .

Die beiden hier hervorgehobenen Worte sind wesentlich. Couturat gibt den ersten Satz in folgender Gleichung wieder:

$$N = x\varepsilon(0\varepsilon s : n\varepsilon s)_n n + 1\varepsilon s . \cdot .)_s x\varepsilon s),$$

d. h. in Worten: „N (Klasse der endlichen ganzen Zahlen) ist die Menge der x, welche die Eigenschaft haben, daß, wenn 0 ein s ist und wenn die Bedingung ‚n ist ein s‘ die Folgerung ‚$n + 1$ ist ein s‘ nach sich zieht, dann x ein s ist“. Er leitet hieraus durch logische Operationen die folgende Gleichung ab:

$$0\varepsilon s : n\varepsilon \cdot N \cap s)_n n + 1\varepsilon s . \cdot .)_s N) s,$$

oder in Worten: „Wenn 0 ein s ist und wenn daraus, daß eine ganze Zahl n ein s ist, folgt, daß $n + 1$ ein s ist, so sind alle ganzen Zahlen (Dinge) s“. Hierin ist N das Symbol einer endlichen ganzen Zahl (vgl. auch S. 57 in dem mehrfach erwähnten Werke von Couturat). Die zweite Gleichung bezieht sich also auch nur auf endliche Zahlen, und die Einschiebung des Wortes „alle“ in den die Gleichung wiedergebenden Satz ist nicht berechtigt.

Wie ich (1904) in der Anmerk. 2 zu Po., WuH. bemerkt habe, beruht auch der Dedekindsche Beweis für das Prinzip der vollständigen Induktion darauf, daß die an endlichen Ketten gemachten Operationen ohne weiteres auf unendliche Ketten übertragen werden, daß also die Vorstellbarkeit der unendlichen Wiederholung eines und desselben Schrittes vorausgesetzt wird. Analoges gilt, wie ich damals bemerkte, für die entsprechenden Betrachtungen von Stolz und Peano, wo der nicht begründete Gebrauch des Wortes „jede“ den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen verdeckt. Nach Couturats Angabe (a. a. O. S. 63) hat auch Keyser (Bulletin of the American math. Soc. vol. 9, 1903) Einwendungen gegen Dedekinds Beweis erhoben.

53) Seite 159. Vgl. Po., WuH. S. 43 und 47 und Anmerk. 22.

54) Seite 162. Die wichtigen Arbeiten Peanos wurden oben in Anmerk. 46 erwähnt. — Sein Aufsatz über eine Kurve, welche ein ganzes Flächenstück erfüllt, findet sich in Bd. 36 der Math. Annalen (1890); ein ähnliches Beispiel gab Hilbert, ibid. Bd. 38.

55) Seite 164. Für die hier angeführten Sätze von Couturat vgl. die oben zitierte Abhandlung desselben in der Revue de metaph. et de mor. — Russells Abhandlung, in der er den Klassenbegriff exakter zu definieren sucht, findet sich in Bd. 4 der 2. Serie der Proceedings of the London Math. Soc. 1905 (vgl. unten S. 169ff.). Es handelt sich hauptsächlich um die Antinomie von Burali-Forti; vgl. auch Couturat, a. a. O. S. 509.

56) Seite 165. Die verschiedenen Arten von Definitionen (als Wortdefinitionen und als Definition durch Postulate) bespricht Couturat, a. a. O. S. 41ff. Die von Poincaré zitierten Sätze finden sich in der erwähnten Abhandlung von Couturat in der Revue de



meth. et de mor. (oder The Monist, vol. 22, S. 512ff.). Er hat darin recht, daß die Definition auch widerspruchsvoller Dinge provisorisch zulässig ist, nämlich um sodann zu beweisen, daß sie einen Widerspruch enthalten, also nicht existieren. — Ein glänzendes Beispiel dafür, daß die mathematische Existenz nur ein Freisein von Widersprüchen bedeuten kann und nichts mit der Existenz im gewöhnlichen Sinne zu tun hat, sind die nicht-euklidische Geometrie, die nicht-archimedische Geometrie usw. (vgl. Po., WuH).

57) Seite 166. Eine Darstellung der Diskussion über den Existenzbegriff in der Mathematik findet man bei Mannoury, S. 139ff. des oben in Anmerk. 40 zitierten Werkes. Vgl. auch Schönflies, a. a. O., sowie die in Anmerk. 46 zitierte Arbeit von Dingler, und Bergmann, Annalen der Naturphilosophie, Bd. 8; Hessenberg, a. a. O. S. 176ff.

58) Seite 169—174. Russell und Whitehead geben a. a. O. (vol. 1, S. 63) eine Zusammenstellung derartiger Antinomien; über Burali-Forti vgl. oben Anmerk. 46. In einer späteren Abhandlung (Mathematical Logic as based on the theory of types, American Journ. of Math. vol. 30) ersetzt Russell die oben S. 171ff. erwähnten Theorien durch seine Typentheorie, an der er nunmehr definitiv festhält und die auch in dem mit Whitehead gemeinsam bearbeiteten Werke festgehalten wird. Poincaré äußert sich darüber in dem Aufsatze „La Logique de l'infini", Revue de metaphysique et de morale, Juli 1909, abgedruckt in der nach seinem Tode erschienenen Sammlung „Dernières Pensées", Paris 1913. Die Typentheorie systematisiert die Forderung der prädikativen Eigenschaft der Mengendefinition, die übrigens auch von den Beziehungen der Objekte zweier Mengen aufeinander (auf der die Definition der Ordinalzahlen beruht) verlangt werden muß. Individuen und Definitionen erster Ordnung sind solche, bei deren Definition der Begriff der Klasse, der die Individuen angehören sollen, nicht selbst benutzt wird; Individuen und Definitionen 2. Ordnung sind solche, bei denen der Begriff der Klasse von Individuen und Definitionen 1. Ordnung vorausgesetzt werden darf, usf., bis zu Definitionen n^{ter} Ordnung. Die Theorie ist analog einer von König aufgestellten, der sogar die Zahl n selbst als transfinite Zahl zulassen will.

Diese Typentheorie gestattet offenbar die Auflösung der Paradoxien; aber sie gestattet nicht, wie Poincaré a. a. O. hervorhebt, die Begründung der Theorie der Ordinalzahlen, setzt letztere vielmehr voraus.

Die Typentheorie gibt auch Regeln, um beim Gebrauch der unbestimmten Worte „alle", „jede", usf. die nötige Vorsicht zu beobachten, vgl. oben Anmerk. 52 und Russell, a. a. O. und in

vol. I, S. 55f. des mehrfach erwähnten Werkes; so nähert sich die Auffassung Russells derjenigen Hilberts in anderer Form, vgl. oben S. 153. — In Bd. 23 von „The Monist" (1913) gibt Russell eine Übersicht über seine Arbeiten. Am Schluß hebt er in Übereinstimmung mit Poincaré hervor, daß der menschlichen Erkenntnis etwas a priori Gegebenes (bei Poincaré das Prinzip der Induktion) zugrunde liegt.

59) Seite 174. Der Aufsatz von Richard ist abgedruckt im Bd. 30 der Acta mathematica. Vgl. Russell und Whitehead a. a. O., vol. 1, S. 67 und Poincaré, Über transfinite Zahlen, Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände, gehalten zu Göttingen, 1909, Leipzig 1910.

60) Seite 176. Es handelt sich um Zermelos Beweis des Satzes (Math. Annalen Bd. 59, 1904 und Bd. 65, 1908), daß jede Menge „wohlgeordnet" werden kann, der davon ausgeht, daß man aus jeder Teilmenge M' der gegebenen Menge M ein Element m' auswählen könne, das man ihr zuordnet; dies ist das Prinzip der Auswahl. Es ist also die Äquivalenz dieses Prinzips mit dem Satze der Wohlordnung durch den Zermeloschen Beweis dargetan. Vgl. die Bemerkungen dazu von Bernstein, Borel und Schönflies, Math. Annalen Bd. 60, sowie Dingler (Untersuchungen zur Mengenlehre I, München 1911, Abschnitt I und II); Russell und Whitehead, a. a. O. vol. I, S. 17 und vol. III, S. 97; Hessenberg, a. a. O. S. 149ff.

Eingehender beschäftigt sich Poincaré in dem oben erwähnten Aufsatze „La Logique de l'infini" mit den Zermeloschen Arbeiten. Er kommt zu dem Schlusse, daß die von jenem aufgestellten Axiome ihm nicht evident erscheinen, und daß der Beweis dafür fehlt, daß sie keinen Widerspruch enthalten. Nach Poincaré lassen sich alle Schwierigkeiten und Widersprüche vermeiden, wenn man sich an folgende Regeln hält:

1. Nur solche Dinge zu betrachten, die sich durch eine endliche Anzahl von Worten definieren lassen.
2. Niemals unbeachtet lassen, daß jede Aussage über das Unendliche nichts anderes sein kann, als die abgekürzte Wiedergabe einer Reihe von Aussagen über das Endliche.
3. Stets die nicht-prädikativen (vgl. oben S. 171 ff.) Klassifikationen und Definitionen vermeiden.

61) Seite 178. Vgl. oben S. 107 und Anmerk. 30 und Po., WuH. S. 1. In dem Aufsatze „Les Mathématiques et la Logique" (Dernières Pensées, S. 159, Paris 1913) charakterisiert Poincaré die sich entgegenstehenden Auffassungen ungefähr in folgender Weise:

„Für den Realisten existierte die Welt schon vor Erschaffung des Menschen, sogar ehe Gott an irgendein denkendes Wesen dachte. Und die Cantorianer sind selbst Realisten in bezug auf die Gebilde der Mathematik; diese Gebilde haben für sie eine selbständige Existenz; der Mathematiker erfindet sie nicht, er entdeckt sie. Und da diese Gebilde in unendlicher Zahl vorhanden sind, so glauben diese Realisten fester an das Unendliche als die Idealisten; ihr Unendlich ist kein Werden, denn es existierte, ehe der menschliche Geist es entdeckte. Sie glauben also an das Aktual-Unendliche, mögen sie es zugeben oder nicht. Es hat in der Philosophie immer entgegengesetzte Meinungen gegeben. Wenn eine Einigung unmöglich ist, so liegt dies daran, daß sich an den verschiedenen Begabungen der Menschen nichts ändern läßt und daß die Menschen nicht alle dieselbe Sprache sprechen. Es gibt eben Sprachen, die sich nicht lernen lassen."

Interessant ist die Feststellung, daß Hermite sich den Cantorschen Theorien gegenüber ablehnend verhielt (vgl. über Hermites Stellung auch die oben in Anmerk. 36 erwähnte Festrede von Königsberger).

Drittes Buch.

Die neue Mechanik.

62) Seite 184. Vgl. die Literaturangaben in Anmerk. 78 zu Po., WuH. sowie in Anmerk. 72 zu Pi., WdG.

63) Seite 186. Vgl. die Anmerk. 109 zu Po., WuH.

64) Seite 187. Über longitudinale und transversale Maße vgl. die Anmerk. 79 zu Pi., WdG.

65) Seite 189. Über Kanalstrahlen vgl. Anmerk. 73 zu Pi., WdG., über die Radiumstrahlen ebd. Anmerk. 76 und Anmerk. 90 zu Po., WuH.

66) Seite 192. Betr. das Zeemannsche Phänomen vgl. Po., WuH. S. 176 sowie Anmerk. 86 daselbst und Pi., WdG. Anmerk. 71, ferner Aufsätze von Poincaré in: L'éclairage électrique, t. 11 und 19. Die Theorie der Elektronen in Metallen ist von Lorentz, Riecke und Drude auf Grund verschiedener Annahmen entwickelt; vgl. die Vergleichung dieser Theorien bei Riecke, Phys. Zeitschr., Bd. 6, 1905, ferner: Debye, Annalen d. Physik, 4. Folge, Bd. 33, 1910.

67) Seite 193. Vgl. oben Anmerk. 64. Poincaré selbst behandelt die Dynamik der Elektronen in Bd. 21 der Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, 1905, und Comptes rendus t. 140, 1905 (vgl. das Werk: Jons, Electrons, Corpuscules, t. II, p. 576ff.).

68) Seite 197. Über die Versuche von Fizeau und Michelson vgl. Po., WuH. Anmerk. 83.

69) Seite 201. Homothetisch nennt man (nach Chasles) solche Ellipsoide, die einander ähnlich sind und sich in ähnlicher Lage befinden.

70) Seite 203. Vgl. hier Poincaré, La théorie de Lorentz et le principe de réaction, Festschrift zum 25jährigen Doktorjubiläum von H. A. Lorentz, Haag 1900; ferner über die Berechnung des Strahlendruckes vgl. die Literaturangaben von Anmerk. 72 zu Pi., WdG.

71) Seite 208. Es kommt hier auf die transversale Masse an; dieselbe ist nach der Abrahamschen Theorie (Annalen d. Physik, 4. Folge, Bd. 10, 1903):

$$m_t = \frac{e^2}{8\pi a c^2}\left[\frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{\beta^2}\right], \quad \text{wo} \quad \beta = \frac{v}{c},$$

wenn a den Radius des Elektron, e seine elektrische Ladung, c die Lichtgeschwindigkeit und v die Geschwindigkeit des Elektron bezeichnet; nach Lorentz dagegen (Versl. Akad. Wet. Amsterdam Bd. 12, 1904) ist

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{wo} \quad m_0 = \frac{e^2}{6\pi a}$$

den Wert für $\beta = 0$ bezeichnet. Denselben Wert erhält man nach Einstein auf Grund des Relativitätsprinzips (ebd. Bd. 17, 1905). Einen noch anderen Wert findet Bucherer (Math. Einführung in die Elektronentheorie, Leipzig 1904):

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt[3]{1-\beta^2}}.$$

Für die Versuche von Kaufmann vgl. Göttinger Nachrichten 1901, 1902, 1903 und Physik. Zeitschr. Bd. 4, 1900, und für die mit größter Sorgfalt durchgeführte Wiederholung derselben: Sitzungsber. der Berliner Akad. Bd. 45, 1905, und Annalen der Phys. Bd. 19, 1906.

72) Seite 209. Die Note unter dem Text bezieht sich auf die neueren Messungen von Bucherer (Phys. Zeitschr. 1908 und 1909). Bestelmeyer kommt wieder zu dem entgegengesetzten Resultate (Ann. d. Phys. Bd. 22, 1907, und Bd. 32). Die Frage ist jedenfalls noch nicht geklärt. Nach Lerp (Untersuchung der Fehlerquellen in den älteren Bestimmungen der spezifischen Ladung des Elektrons, Göttinger Inauguraldissertation, Halle 1911) ist die Art der Berechnung der Feldstärke nicht von wesentlichem Einflusse auf das Resultat, vielleicht aber die Divergenz der Kathodenstrahlen, die bei der theoretischen Ableitung vernachlässigt ist.

73) Seite 210. Auf die wesentlichen Punkte meiner diesbezüglichen Untersuchung habe ich in Anmerk. 79 zu Pi., WdG. hingewiesen. Daß ein isoliertes Elektron eine geradlinige und gleichförmige Bewegung ausführt, wenn keine äußeren Kräfte auf dasselbe wirken, gilt darnach erst, wenn das Elektron eine gewisse Zeit, nachdem es die Ruhelage verlassen hat, durch Hinzufügung äußerer Kräfte gezwungen wird, die verlangte konstante Geschwindigkeit beizubehalten, während es, wenn solche Kräfte nicht hinzugefügt werden, einen gewissen Widerstand zu überwinden hätte und folglich sich mit abnehmender Geschwindigkeit bewegen müßte. Ähnlich wird der Fall liegen, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons eine plötzliche Änderung erfährt (wie es beim Verlassen der Kathode im luftleeren Raume geschieht); doch habe ich diesen Fall noch nicht ausgeführt.

74) Seite 213. Ähnliche Bedenken entstehen, wenn die Bewegung quasistationär (d. h. die Beschleunigung sehr gering) ist; auf diese Annahme beziehen sich die in Anmerk. 71 mitgeteilten Formeln für die transversale Masse. Dieselben sind von den genannten Autoren ebenfalls unter vereinfachenden Voraussetzungen abgeleitet und bedürfen (wie a. a. O. erwähnt) einer genaueren Diskussion; insbesondere ist das allmähliche Anwachsen der Geschwindigkeit bis zur Lichtgeschwindigkeit noch näher zu untersuchen. Bei der Relativitätstheorie und bei der Minkowskischen Theorie ist die Unmöglichkeit einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit eine direkte Folge der gemachten Voraussetzungen.

75) Seite 214. Daß die Röntgenstrahlen in der Tat Lichtstrahlen von sehr kurzer Wellenlänge sind, wurde neuerdings von Friedrich, Knipping und Laue experimentell nachgewiesen, indem sie Interferenzerscheinungen erhielten, wenn statt des Beugungsgitters ein Kristall (bei dem die Maschen des Gitters gewissermaßen durch die Zwischenräume zwischen den Molekülen des Kristalls ersetzt sind) benutzt wurde: Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der Kgl. bayer. Akad. der Wiss. 1912, S. 303ff.

76) Seite 213. Über die Definition der Masse vgl. Po., WuH. S. 100ff.

77) Seite 221. Betreffend das Webersche Gesetz vgl. Anmerk. 64 und 106 zu Po., WuH. — Nachdem Leverrier gefunden hatte (vgl. Anmerk. 43 zu Pi., WdG.), daß die Perihellänge der Merkurbahn sich im Jahrhundert um rund 40^0 schneller vorwärtsbewegt, als die allein auf die gegenseitige Anziehung der Planeten gegründete Theorie ergibt, sind die verschiedensten Annahmen zur Erklärung dieser Erscheinung gemacht und theoretisch geprüft worden. Sie sind von Newcomb kritisch besprochen (The Elements of the

four inner Planets, Washington 1895); derselbe wies auch ähnliche Erscheinungen bei Venus, Erde und Mars nach. Nach Seeliger (Sitzungsber. der Kgl. bayer. Akad. der Wiss., math.-phys. Klasse Bd. 36, 1906) läßt sich eine befriedigende Erklärung finden, wenn man die Erscheinungen des Zodiakallichtes auf fein zerstreute Materie zurückführt (vgl. Anmerk. 47 zu Pi., WdG.) und unter gewisser Annahme über die Dichtigkeitsverteilung dieser Materie die von ihr ausgehenden und auf die inneren Planeten wirkenden Anziehungskräfte in Rechnung zieht.

78) Seite 222. Le Sage (1724—1803) veröffentlichte seine Theorie 1782 in den Abhandlungen der Berliner Akademie unter dem Titel: Lucrèce Newtonien; vgl. auch sein von Prévost herausgegebenes nachgelassenes Werk: Traité de Physique mécanique, Genua und Paris 1818; ferner W. Thomsons Darstellung der Theorie in Philosoph. Magaz. vol. 45, 1873 (Math. and physic. Papers vol. 5, S. 64) sowie weitere Literaturangaben in Anmerk. 71 zu Po., WuH

Viertes Buch.

Die Wissenschaft der Astronomie.

79) Seite 231. Nach dem Maxwellschen Gesetze ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Geschwindigkeit p eines Moleküls zwischen p und $p + dp$ liegt gleich

$$A \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{k}\right)^2} dp,$$

wo A eine Konstante bedeutet und k^2 das arithmetische Mittel der Quadrate aller Geschwindigkeiten p bezeichnet; vgl. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Teil 2, S. 157 ff. und S. 259 ff., Leipzig 1898. Hieraus berechnet sich die auch für die weiteren Betrachtungen des Textes wichtige „mittlere Weglänge eines Gasmoleküls".

80) Seite 233. Für die hier erwähnten Untersuchungen von Lord Kelvin vgl. dessen Vorlesungen über Molekulardynamik und die Theorie des Lichts (Baltimore Lectures, 1904), deutsch von Weinstein, Leipzig 1909, Vorlesung 16, und dessen Aufsatz: On the Clustering of gravitational Matter in any part of the Universe, Reports of the Brit. Associat. 1901, S. 563, deutsch als Anhang zu den erwähnten Vorlesungen S. 449. — Die Poincaréschen Betrachtungen des Textes findet man ausführlicher in seinem Werke: Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, Paris 1911. — Die Verteilung der Dichtigkeit der Sterne in bezug auf die Milchstraße hat Seeliger eingehend untersucht: Sitzungsber. der Kgl. bayer. Akad. der Wiss.

1911 und 1912, die Bewegung unseres Sternsystems im Weltraum Anding: Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum, Leipzig 1910. — Wenn oben S. 235 geschlossen wird, daß es nicht soviel dunkle Materie gibt als leuchtende Materie, so muß andererseits darauf hingewiesen werden, daß nach Seeliger (a. a. O. 1909) dunkle Materie, insbesondere ausgedehnte Staubmassen in der Stellarastronomie eine größere Rolle spielen, als man früher mutmaßte.

81) Seite 248. Vgl. hierzu Pi., WdG. S. 75 und Anmerk. 44. In Deutschland wurden derartige Untersuchungen von Helmert (Die Schwerkraft im Hochgebirge, Berlin 1890, und: Unvollkommenheiten im Gleichgewichtszustande der Erdkruste, ebd. 1908) und Hecker (Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean, Berlin 1903; Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Großen Ozean, ebd. 1908) ausgeführt.

82) Seite 253. Es kommen hier als deutsche Geodäten besonders Gauß, Bessel und Baeyer in Betracht. Letzterem verdankt man auch die Anregung (1861) zur Bildung der europäischen Gradmessungkommission (seit 1886 internationale Erdmessung), die neben den im Texte erwähnten französischen Arbeiten in Peru auch eine völlige Ummessung des Mittelländischen Meeres, eine Meridianmessung von Kapstadt bis Ägypten (teilweise bereits ausgeführt von Gill), die dann durch Kleinasien und Rußland fortgesetzt werden soll, Verbindungen der Triangulierungen in den verschiedenen Ländern, Pendelbeobachtungen zum Messen der Störungen der Schwerkraft usw. durchführen läßt.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

